SOLUCIONÁRIO

NOÇÕES DE MATEMÁTICA

$z_1 = 1 \cdot \text{cis}\, 0°$

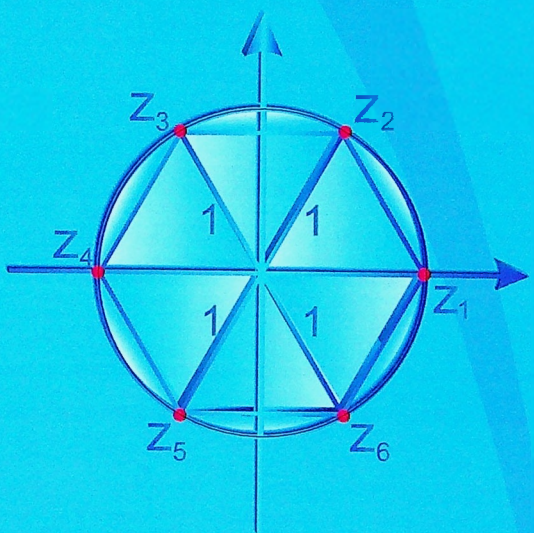
$z_2 = 1 \cdot \text{cis}\, 60°$

$z_3 = 1 \cdot \text{cis}\, 120°$

$z_4 = 1 \cdot \text{cis}\, 180°$

$z_5 = 1 \cdot \text{cis}\, 240°$

$z_6 = 1 \cdot \text{cis}\, 300°$



VOLUME 7

Números Complexos
Polinômios

Marcílio Miranda de Carvalho
Márcio Miranda de Carvalho

Marcilio Miranda de Carvalho
Márcio Miranda de Carvalho

SOLUCIONÁRIO MATEMÁTICA

AREF 7

VOLUME 7

Editora Vestseller
Fortaleza
Abril de 2016

Índice

PREFÁCIO 5

Capítulo 1 – O Conjunto dos Números Complexos 13

Capítulo 2 – Forma Álgebra dos Números Complexos 21

Capítulo 3 – A Geometria dos Números Complexos 33

Capítulo 4 – A Trigonometria dos Números Complexos 39

Capítulo 5 – Operações na Forma Trigonométrica 43

Capítulo 6 – O Conceito de Polinômio Igualdade 55

Capítulo 7 – Operações com o Polinômio Grau 59

Capítulo 8 – A Divisão dos Polinômios 69

Capítulo 9 – A Divisão de Polinômios em que o Divisor é de Grau 1 79

Capítulo 10 – Outros Temas Importantes 91

Capítulo 11 – Equações Algébricas 113

Capítulo 12 – Raízes Múltiplas 125

Capítulo 13 – Raízes Imaginárias 133

Capítulo 14 – Relações de Girard 141

Capítulo 15 – Raízes Racionais 167

Capítulo 16 – Equações Recíprocas 175

Capítulo 17 – Raízes Comuns 179

Capítulo 18 – Raízes Reais 183

Capítulo 1
O Conjunto dos Números Complexos

Capítulo 1

Questão – 1.7

Solução:

a) $x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-9} \Rightarrow x = \pm\sqrt{9}\cdot\sqrt{-1} \Rightarrow x = \pm 3i$

b) $x^2 + 5 = 0 \Rightarrow x^2 = -5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-5} \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}\cdot\sqrt{-1} \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}i$

c) $x^4 - 1 = 0 \Rightarrow (x^2-1)(x^2+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x^2 = \pm\sqrt{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x^2 = \pm i \end{cases}$

d) $x^4 - 256 = 0 \Rightarrow (x^2-16)(x^2+16) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 16 = 0 \\ x^2 + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 4 \\ x^2 = \pm\sqrt{-16} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \pm 4 \\ x^2 = \pm 4i \end{cases}$

Questão – 1.8

Solução:

a) $x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 2 = -4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{-4} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{-1} = 2i \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

b)

$$4x^2 - 16x + 17 = 0 \Rightarrow \Delta = (-16)^2 - 4\cdot 4\cdot 17 = -16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{-16} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{-1} = 4i$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{16 \pm 4i}{8} = 2 \pm \frac{1}{2}i$$

c)

$$x^2 - 6x + 17 = 0 \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 17 = -32 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{-32} = \sqrt{32} \cdot \sqrt{-1} = 4\sqrt{2}i$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}i}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}i$$

d) $x^2 - 10x + 40 = 0 \Rightarrow \Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40 = -60 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{-60} = \sqrt{60} \cdot \sqrt{-1} =$

$$= 2\sqrt{15}i \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 \pm 2\sqrt{15}i}{2} = 5 \pm \sqrt{15}i$$

Questão – 1.9

Solução:

$$x^3 + 1 = (x+1) \cdot (x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x^2 - x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \end{cases}$$

Questão – 1.10

Solução:

a) $(-i)^3 - 2(-i)^2 - i - 2 = i - 2 \cdot (-1) - i - 2 = i + 2 - i - 2 = 0$
Portanto $-i$ é raiz da equação

b) $(2i)^4 - 2 \cdot (2i)^3 + 8 \cdot (2i) - 16 = 16i^4 - 16i^3 + 16i - 16 = 16 - 16i + 16i - 16 = 0$
Portanto $2i$ é raiz da equação

c) $(2+i)^3 - 5(2+i)^2 + 9(2+i) - 5 = (8 + 12i + 6i^2 + i^3) - 5 \cdot (4 + 4i + i^2) + (18 + 9i) - 5$
$= (8 + 12i - 6 - i) + (-20 - 20i + 5) + (18 + 9i) - 5 = 0$
Portanto $2 + i$ é raiz da equação

Questão – 1.14

Solução:

a) $z_1 + z_2 = (1,4) + (-2,-2) = (1-2, 4-2) = (-1,2)$

b) $z_1 + z_2 + z_3 = (1,4) + (-2,-2) + (0,3) = (1-2+0, 4-2+3) = (-1,5)$

c) $z_1.z_2 = (1,4).(-2,-2) = (1.(-2) - 4(-2)+, 1.(-2) + 4.(-2)) = (6,-10)$

d) $(z_1 \cdot z_2) \cdot (z_3) = (6,-10) \cdot (0,3) = (6 \cdot 0 - (-10)(3),\ 6 \cdot (3) + 0 \cdot (-10)) = (30,18)$

e) $(z_1 + z_3) = (1,4) + (0,3) = (1,7)$
$z_2 \cdot (z_1 + z_3) = (-2,-2) \cdot (1,7) = ((-2) \cdot 1 - (-2) \cdot (7),\ (-2) \cdot 7 + (-2) \cdot 1) = (12,-16)$

f) $(z_1)^2 = (z_1 \cdot z_1) = (1,4) \cdot (1,4) = (1 \cdot 1 - (4 \cdot 4),\ 1 \cdot 4 + 1 \cdot 4) = (-15,8)$
$(z_3)^2 = (z_3 \cdot z_3) = (0,3) \cdot (0,3) = (0 \cdot 0 - (3 \cdot 3),\ 0 \cdot 3 + 0 \cdot 3) = (-9,0)$
$(z_1)^2 + (z_3)^2 = (-15,8) + (-9,0) = (-24,8)$

g) $(z_1 + z_2)^2 = (-1,2) \cdot (-1,2) = ((-1) \cdot (-1) - (2) \cdot (2), (-1) \cdot (2) + (-1) \cdot (2)) = (-3,-4)$

Questão – 1.15

Solução:

a) $\begin{cases} x + 2 = 2 \\ y - 3 = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2 \\ y = -\dfrac{1}{2} + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

b) **Correção no ENUNCIADO**: $(2x - 3y, 3x + 2y) = \left(-\dfrac{15}{2}, 5\right)$

$$\begin{cases} 2x - 3y = -\dfrac{15}{2} \\ 3x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 6y = -15 \\ 9x + 6y = 15 \end{cases} \Rightarrow 13x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$$

Questão – 1.16

Solução:

Seja z = (a, b) então temos que:

a) $\begin{cases} a+5=0 \\ b-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-5 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow z=(-5,5)$

b) $(a,b).\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right)=(1,0) \Rightarrow \begin{cases} \frac{4a}{5}-\frac{2b}{5}=1 \\ \frac{2a}{5}+\frac{4b}{5}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a-4b=10 \\ 2a+4b=0 \end{cases} \Rightarrow a=1 \Rightarrow b=-\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow z=\left(1,-\frac{1}{2}\right)$

c) $\begin{cases} a+\frac{4}{5}=5 \\ b+\frac{2}{5}=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5-\frac{4}{5} \\ b=-5-\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow z=\left(\frac{21}{5},-\frac{27}{5}\right)$

d) $(a,b).(5,-5)=\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right) \Rightarrow \begin{cases} 5a+5b=\frac{4}{5} \\ -5a+5b=\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow b=\frac{3}{25} \Rightarrow a=\frac{1}{25} \Rightarrow z=\left(\frac{1}{25},\frac{3}{25}\right)$

Questão – 1.17

Solução:

Seja z = (a, b)

$z^2=z.z=(a,b).(a,b)=(a^2-b^2,ab+ab)=(0,-8) \Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2=0 \\ 2ab=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2,b=-2 \\ a=-2,b=2 \end{cases}$

Questão – 1.19

Solução:

a) $z = \left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right) \Rightarrow z^{-1} = \left(\frac{\frac{12}{13}}{\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2}, \frac{-\frac{5}{13}}{\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2} \right) = \left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$

b) $z = (5,0) \Rightarrow z^{-1} = \left(\frac{5}{(5)^2 + (0)^2}, \frac{0}{(5)^2 + (0)^2} \right) = \left(\frac{1}{5}, 0\right)$

c) $z = (0,3) \Rightarrow z^{-1} = \left(\frac{0}{(0)^2 + (3)^2}, \frac{-3}{(0)^2 + (3)^2} \right) = \left(0, -\frac{1}{3}\right)$

Questão – 1.20

Solução:

a) Já vimos na questão 1.19 letra A que:

$$\left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)^{-1} = \left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$$

$$\frac{(1,1)}{\left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)} = (1,1) \cdot \left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)^{-1} = (1,1) \cdot \left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right) = \left(1 \cdot \frac{12}{13} - 1 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right), 1 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) + 1 \cdot \frac{12}{13}\right) =$$

$$= \left(\frac{17}{13}, \frac{7}{13}\right)$$

b) Já vimos na questão 1.19 letra B que:

$$(5,0)^{-1} = \left(\frac{1}{5}, 0\right)$$

$$\frac{(0,-5)}{(5,0)} = (0,-5) \cdot (5,0)^{-1} = (0,-5) \cdot \left(\frac{1}{5}, 0\right) = \left(0 \cdot \frac{1}{5} - 0 \cdot (-5), 0 \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot (-5)\right) = (0,-1)$$

c) Já vimos na questão 1.19 letra C que:

$$(0,3)^{-1} = \left(0,-\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{(-3,0)}{(0,3)} = (-3,0)\cdot(0,3)^{-1} = (-3,0)\cdot\left(0,-\frac{1}{3}\right) = \left(-3\cdot 0 - 0\cdot\left(-\frac{1}{3}\right), (-3)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) + 0\cdot 0\right) = (0,1)$$

Questão – 1.21

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 1.22

Solução:

$$\frac{(1,3)^5}{(1,3)^3} = (1,3)^5\cdot(1,3)^{-3} = (1,3)^2 = (1,3)\cdot(1,3) = (1\cdot 1 - 3\cdot 3,\ 1\cdot 3 + 1\cdot 3) = (-8,6)$$

Na pagina 23 do LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7 mostra-se que $(1,0)$ é elemento neutro da multiplicação logo $(1,0)^7 = (1,0)$

$$\frac{(-3,5)^5}{(3,-5)^5} = (-3,5)^5\cdot(3,-5)^{-5} = \left((-3,5)^1\right)^5\cdot\left((3,-5)^{-1}\right)^5 = \left((-3,5)\cdot(3,-5)^{-1}\right)^5 =$$

$$= \left((-3,5)\cdot\left(\frac{3}{3^2+(-5)^2}, \frac{5}{3^2+(-5)^2}\right)\right)^5 = \left((-3,5)\cdot\left(\frac{3}{34}, \frac{5}{34}\right)\right)^5 =$$

$$= \left(-3\cdot\frac{3}{34} - 5\cdot\frac{5}{34}, -3\cdot\frac{5}{34} + 5\cdot\frac{3}{34}\right)^5 = (-1,0)^5 = (-1,0)^2\cdot(-1,0)^2\cdot(-1,0) =$$

$$= (1,0)\cdot(1,0)\cdot(-1,0) = (-1,0)$$

$$\frac{(1,3)^5}{(1,3)^3} + (1,0)^7 - \frac{(-3,5)^5}{(3,-5)^5} = (-8,6) + (1,0) - (-1,0) = (-6,6)$$

Capítulo 2
Forma Álgebra dos Números Complexos

Capítulo 2

Questão – 2.11

Solução 1:

a) $(3-2i)+(2+5i)+(-1+i)=(3+2-1)+i.(-2+5+1)=4+4i$

b) $(3-2i)-3.(2+5i)+i.(-1+i)=(3-2i)+(-6-15i)+(-1-i)=(3-6-1)+i.(-2-15-1)=-4-18i$

c) $z_1 \cdot z_2 = (3-2i)\cdot(2+5i)=16+11i \Rightarrow (z_1 \cdot z_2)\cdot(z_3)=(16+11i)\cdot(-1+i)=-27+5i$

d) $z_2.z_3=(2+5i).(-1+i)=-7-3i \Rightarrow iz_1+z_2.z_3=i.(3-2i)+(-7-3i)=-5$

e) $z_1+z_2=(3-2i)+(2+5i)=5+3i \Rightarrow (z_1+z_2)^2+(z_3)^2=(5+3i)^2+(-1+i)^2=$
$=(16+30i)+(-2i)=16-28i$

f) $z_1^2-z_2^2+z_3^3=(3-2i)^2-(2+5i)^2+(-1+i)^3=(5-12i)-(-21+20i)+(2+2i)=$
$=28-30i$

Questão – 2.12

Solução:

a) $(-3i)^5=(-3)^5\cdot i^5=-243i$

b) $(1+i)^4=((1+i)^2)^2=(1+2i+i^2)^2=(2i)^2=4i^2=-4$

c) $(-1-i)^6=(-1)^6(1+i)^6=(1+i)^4\cdot(1+i)^2=(-4)\cdot(1+2i+i^2)^2=(-4)\cdot(2i)=-8i$

d) $(1-i)^{10}=((1-i)^2)^5=(1-2i+i^2)^5=(-2i)^5=-32i^5=-32i$

Questão – 2.13

Solução:

$z=(13i-6)+(2x+i)\cdot(3-2xi)=(13i-6)+(6x-4x^2i+3i+2x)=(-6+8x)+i(16-4x^2)$

a) $16 - 4x^2 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 2$

b) $16 - 4x^2 \neq 0 \Rightarrow 4x^2 \neq 16 \Rightarrow x \neq \pm 2$

c) $-6 + 8x = 0 \Rightarrow 8x = 6 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

Questão – 2.14

Solução:

$(x + yi)\cdot(y + xi) = (xy + xyi^2) + i(x^2 + y^2) = i(x^2 + y^2) \Rightarrow x^2 + y^2 \neq 0$

Questão – 2.15

Solução:

$ai(a - 2i) - (10 + 9i) = (2a - 10) + i(a^2 - 9)$

a) $2a - 10 \geq 0 \Rightarrow 2a \geq 10 \Rightarrow a \geq 5$

b) $a^2 - 9 < 0 \Rightarrow a^2 < 9 \Rightarrow -3 < a < 3$

c) $2a - 10 < 0 \Rightarrow 2a < 10 \Rightarrow a < 5$
$a^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq 9 \Rightarrow a \geq 3$ ou $a \leq -3$
Fazendo as interseções temos que: $3 \leq a < 5$ ou $a \leq -3$

Questão – 2.16

Solução:

a) $(2x + yi) + (y - 2xi) = 23(1 - i) - 2 \Rightarrow (2x + y) + i(y - 2x) = 21 - 23i$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 21 \\ y - 2x = -23 \end{cases} \Rightarrow y = -1 \Rightarrow x = 11$$

b) $(2x + yi)\cdot(y - 2xi) = (1 - i) + (1 + i) \Rightarrow (4xy) + (-4x^2 + y^2)i = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4x^2 + y^2 = 0 \\ 4xy = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, y = 1 \\ x = -\frac{1}{2}, y = -1 \end{cases}$$

Questão – 2.17

Solução:

a) $x(2+xi)-6i^2=9i \Rightarrow (2x+6)+x^2i=9i \Rightarrow x=-3$

b) $(x-5i)\cdot(2+xi)=14 \Rightarrow (2x+5x)+i\cdot(-10+x^2)=14 \Rightarrow \begin{cases}7x=14\\-10+x^2=0\end{cases} \Rightarrow S=\varnothing$

Questão – 2.18

Solução:

Seja z = a + bi

a) $(a+bi)^2=3+4i \Rightarrow (a^2-b^2)+2abi=3+4i \Rightarrow \begin{cases}a^2-b^2=3\\2ab=4\end{cases} \Rightarrow a^2-\left(\frac{2}{a}\right)^2=3$

$$\Rightarrow a^4-3a^2-4=0 \Rightarrow \begin{cases}a^2=-1\\a^2=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=2,b=1\\a=-2,b=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}z=2+i\\z=-2-i\end{cases}$$

b) $(a+bi)^3=-27 \Rightarrow a^3+3\cdot a^2\cdot(bi)+3a\cdot(bi)^2+(bi)^3=-27$

$$\Rightarrow (a^3-3ab^2)+i(3a^2b-b^3) \Rightarrow \begin{cases}a^3-3ab^2=-27\\3a^2b-b^3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a.(a^2-3b^2)=-27\\b.(3a^2-b^2)=0\end{cases}$$

Vamos dividir em 2 casos:

Caso 1: b = 0

Neste caso temos que: $a^3=-27 \Rightarrow a=-3 \Rightarrow z=-3$

Caso 2: $3a^2 - b^2 = 0$

$$3a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow b = \pm\sqrt{3}a \Rightarrow \begin{cases} b = \sqrt{3}a \Rightarrow a\cdot(a^2 - 9a^2) = -27 \Rightarrow a = \dfrac{3}{2} \Rightarrow b = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \\ b = -\sqrt{3}a \Rightarrow a\cdot(a^2 - 9a^2) = -27 \Rightarrow a = \dfrac{3}{2} \Rightarrow b = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i \\ z = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

NOTA: observe que nosso gabarito não está de acordo com o gabarito do livro NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7.Vamos verificar se $\left(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = -27$:

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right) + 3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)^3 =$$

$$\frac{27}{8} + \frac{81\sqrt{3}}{8}i - \frac{243}{8} - \frac{81\sqrt{3}}{8}i = \frac{27}{8} - \frac{243}{8} = -\frac{216}{8} = -27$$

Portanto a solução $a = \dfrac{3}{2} \Rightarrow b = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ também vale.

Questão – 2.19

Solução:

a) $z^2 = 2z - 3 \Rightarrow z^2 - 2z + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4\cdot1\cdot3 = -8 \Rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{2 + \sqrt{-8}}{2} \\ z = \dfrac{2 - \sqrt{-8}}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{2+\sqrt{8}\cdot\sqrt{-1}}{2} \\ z = \dfrac{2-\sqrt{8}\cdot\sqrt{-1}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{2+2\sqrt{2}i}{2} \\ z = \dfrac{2-2\sqrt{2}i}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1+\sqrt{2}i \\ z = 1-\sqrt{2}i \end{cases}$$

b) $z^2 + 14z + 50 = 0 \Rightarrow \Delta = (14)^2 - 4\cdot 1\cdot 50 = -4 \Rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{-14+\sqrt{-4}}{2} \\ z = \dfrac{-14-\sqrt{-4}}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{-14+\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}}{2} \\ z = \dfrac{-14-\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{-14+2i}{2} \\ z = \dfrac{-14-2i}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -7+i \\ z = -7-i \end{cases}$$

Questão – 2.20

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 2.21

Solução:

Vamos usar a formula de Moivre: $(\cos\alpha + i\text{sen}\alpha)^n = (\cos(n\alpha) + i\text{sen}(n\alpha))$

a) $\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\text{sen}\dfrac{\pi}{12}\right)^2 = \left(\cos\dfrac{2\pi}{12} + i\text{sen}\dfrac{2\pi}{12}\right) = \left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\text{sen}\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot i$

b) $2\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\text{sen}\dfrac{\pi}{8}\right)^2 = 2\cdot\left(\cos\dfrac{2\pi}{8} + i\text{sen}\dfrac{2\pi}{8}\right) = 2\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\text{sen}\dfrac{\pi}{4}\right) =$

$$= 2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

Questão – 2.22

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 2.23

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 2.26

Solução:

a) $i^{38} = (i^4)^9 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$

b) $i^{507} = (i^4)^{126} \cdot i^3 = 1 \cdot (-1) = -i$

c) $i^{1348} = (i^4)^{337} = 1$

d) $i^{307533} = (i^4)^{76883} \cdot i = 1 \cdot (i) = i$

e) $i^{32} - i^5 + i^7 - i^{17} - i^{42} = (i^4)^8 - (i^4) \cdot i + (i^4) \cdot i^3 - (i^4)^4 \cdot i - (i^4)^{10} \cdot i^2 = 1 - i - i + i + 1 = 2 - 3i$

f) $(1+i)^{28} = ((1+i)^2)^{14} = (2i)^{14} = 2^{14} \cdot i^{14} = 2^{14} \cdot (i^4)^3 \cdot i^2 = -16384$

Questão – 2.27

Solução:

a) $A = \dfrac{i^n}{i^{-n}} = i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n = \pm 1$

b) $A = i^n + i^{n+1} = i^n \cdot (1+i) = \begin{cases} i \cdot (1+i) = -1+i \\ -1 \cdot (1+i) = -1-i \\ -i \cdot (1+i) = 1-i \\ 1 \cdot (1+i) = 1+i \end{cases}$

c) $A = \dfrac{i^n \cdot i^n}{\dfrac{1}{i}} = i^{2n+1} = (i^2)^n \cdot i = (-1)^n = \pm i$

Questão – 2.28

Solução:

$$i^{3n+2} - i^{2-n} = (i^3)^n \cdot i^2 - i^2 \cdot i^{-n} = (i^2) \cdot (i^{3n} - i^{-n}) = (-1) \cdot \left(i^{3n} - \frac{1}{i^n}\right) = \frac{i^{4n} - 1}{i^n} = 0$$

Questão – 2.29

Solução:

a) $i^m = i^{-n} \Rightarrow m - (-n) = 4k \Rightarrow m + n = 4k, k \in \mathbb{Z}$

b) $i^m = i^{n-3} \Rightarrow m - (n + 3) = 4k \Rightarrow m - n = 4k + 3, k \in \mathbb{Z}$

Questão – 2.37

Solução:

a) $\frac{1+2i}{3+2i} = \frac{1+2i}{3+2i} \cdot \frac{3-2i}{3-2i} = \frac{3-2i+6i+4}{13} = \frac{7}{13} + \frac{4}{13}i$

b) $\frac{10-i}{1+3i} = \frac{10-i}{1+3i} \cdot \frac{1-3i}{1-3i} = \frac{10-30i-i-3}{10} = \frac{7}{10} - \frac{31}{10}i$

c) $\frac{1+3i}{1-3i} = \frac{1+3i}{1-3i} \cdot \frac{1-3i}{1-3i} = \frac{1+6i+-9}{10} = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

d) $\frac{4+3i}{3-4i} = \frac{4+3i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{12+16i+9i-12}{25} = i$

e) $\frac{7+7i}{\sqrt{3}+2i} = \frac{7+7i}{\sqrt{3}+2i} \cdot \frac{\sqrt{3}-2i}{\sqrt{3}-2i} = (2+\sqrt{3}) + (\sqrt{3}-2).i$

f) $\frac{6i}{1-i} = \frac{6i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = -3+3i$

Questão – 2.38

Solução:

a) $\dfrac{1}{-3i} = \dfrac{1}{-3i}\cdot\dfrac{i}{i} = \dfrac{i}{3}$

b) $\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{1+i}\cdot\dfrac{1-i}{1-i} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

c) $i^{77} - i^{43} + i^{26} = -1 + 2i$

$\dfrac{1}{-1+2i} = \dfrac{1}{-1+2i}\cdot\dfrac{-1-2i}{-1-2i} = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i$

d) $\dfrac{1}{\cos x + i\,\text{sen}x} = \dfrac{1}{\cos x + i\,\text{sen}x}\cdot\dfrac{\cos x - i\,\text{sen}x}{\cos x - i\,\text{sen}x} = \dfrac{\cos x - i\,\text{sen}x}{\cos^2 x + \text{sen}^2 x} = \cos x - i\,\text{sen}x$

Questão – 2.39

Solução:

$$\frac{30}{x^2+4} + \frac{x+4i}{2+xi} = \frac{30}{x^2+4} + \frac{x+4i}{2+xi}\cdot\frac{2+xi}{2+xi} = \frac{30+6x}{x^2+4} + i\cdot\frac{8-x^2}{x^2+4}$$

a) $8 - x^2 = 0 \Rightarrow 8 = x^2 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$

b) $\begin{cases} 30 + 6x \neq 0 \\ 8 - x^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 5 \\ x \neq \pm 2\sqrt{2} \end{cases}$

Questão – 2.40

Solução:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \left(\frac{bc+ad}{c^2+d^2}\right)\cdot i \Rightarrow \begin{cases} ac + bd = 0 \\ bc - ad \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ac = -bd \\ bc \neq ad \end{cases}$$

Questão – 2.41

Solução:

Seja z = ai

$$\frac{4+(ai)\cdot i}{ai+1+i}=\frac{4-a}{ai+i+1}\cdot\frac{ai+i-1}{ai+i-1}=\frac{-4+a}{(ai+i)^2-1}+\left(\frac{-a^2+3a+4}{(ai+i)^2-1}\right)i$$

$$\Rightarrow -a^2+3a+4=0\Rightarrow\begin{cases}a=4\\a=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}w=4i\\w=-i\end{cases}$$

Questão – 2.42

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 2.43

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 2.44

Solução:

Seja z = a + bi

a) $(a + bi) - 2.(a - bi) = 4 - 3i \Rightarrow -a + 3bi = 4 - 3i \Rightarrow a = -4$ e $b = -1 \Rightarrow$ $z = -4 - i$

b) $2(a + bi) - i.(a - bi) = 15i \Rightarrow (2a - b) + i.(2b - a) = 15i$

$$\Rightarrow\begin{cases}2b-a=15\\2a-b=0\end{cases}\Rightarrow b=10\Rightarrow a=5\Rightarrow z=5+10i$$

c) $(a+bi)=(a-bi)^2\Rightarrow a+bi=a^2-b^2-2abi\Rightarrow(a^2-b^2-a)+i\cdot(-2ab-b)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}a^2-b^2-a=0\\b(-2a-1)=0\end{cases}$$

Agora vamos dividir em 2 casos:

Caso 1: $b = 0$

Neste caso temos que: $a^2 - a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

Caso 2: $-2a - 1 = 0$

Neste caso temos que: $a = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$

d) Claramente há uma falha no enunciado
Uma possível correção no enunciado: $z = i\,\bar{z}$
$z = i \cdot \bar{z} \Rightarrow a + bi = i(a - bi) \Rightarrow (a + bi) = b + ai \Rightarrow a = b \Rightarrow z = a + ai = a \cdot (1 + i)$

Questão – 2.45

Solução:

Seja $z = a + bi$

a) $iz + 3 - i4 + 3i \Rightarrow i(a + bi) + 3 - i = 4 + 3i \Rightarrow (-b - 1) + i(a - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow z = 4 - i$

b) $(2 - 3i)z + 5 - i = 4 \Rightarrow (2 - 3i)(a + bi) + 5 - i = 4 \Rightarrow (2a + 3b + 1) + (-3a + 2b - 1) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 3b + 1 = 0 \\ -3a + 2b - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a + 9b + 3 = 0 \\ -6a + 4b - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 13b = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{13} \Rightarrow a = -\frac{5}{13} \Rightarrow$

$\Rightarrow z = -\frac{5}{13} - \frac{1}{13}i$

c) $(1 + i)z + 1 - 3i = -2iz \Rightarrow (1 + i)(a + bi) + 1 - 3i = -2i \cdot (a + bi) \Rightarrow$

$\Rightarrow (a + bi + ai - b) + 1 - 3i = -2ai + 2b \Rightarrow (a - 3b + 1) + i(3a + b - 3) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a - 3b + 1 = 0 \\ 3a + b - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 3b + 1 = 0 \\ 9a + 3b - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow 10a = 8 \Rightarrow a = \frac{4}{5} \Rightarrow b = \frac{3}{5}$

$z = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

Questão – 2.46

Solução:

a) $z = (1+7i)+(3-5i) = 4+2i \Rightarrow \overline{z} = 4-2i$

b) $z = (1-7i)+(3+5i) = 4-2i$

c) $z = (1+2i)\cdot(3-i) = 5+5i \Rightarrow \overline{z} = 5-5i$

d) $z = (1-2i)+(3+i) = (3+2)+i\cdot(-6+1) = 5-5i$

e) $z = \dfrac{1-i}{1+i} = \dfrac{1-i}{1+i}\cdot\dfrac{1-i}{1-i} = \dfrac{-2i}{2} = -i \Rightarrow \overline{z} = i$

f) $z = \dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{1+i}{1-i}\cdot\dfrac{1+i}{1+i} = \dfrac{2i}{2} = i$

Questão – 2.47

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 2.48

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 2.49

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 2.50

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Capítulo 3

A Geometria dos Números Complexos

Capítulo 3

Questão – 3.2

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 3.3

Seja $z = a + bi$

$$\frac{z}{\overline{z}} = \frac{x+yi}{x-yi} = \frac{x+yi}{x-yi}\cdot\frac{x+yi}{x+yi} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)\cdot i \Rightarrow x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm x$$

A REPRESENTAÇÃO GEOMETRICA ESTÁ FEITA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 3.4

Solução:

$$(x - 2yi)\cdot(2y - xi) = -16i \Rightarrow (2xy - x^2 i - 4y^2 i + 2xyi^2) = -16i$$

$$\Rightarrow i(x^2 + 4y^2) = 16i \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 16 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{4y^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

A REPRESENTAÇÃO GEOMETRICA ESTÁ FEITA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 3.12

Solução:

a) $|7 - 24i| = \sqrt{7^2 + (-24)^2} = \sqrt{625} = 25$

b) $|(2 + 3i)\cdot(1 - i)| = |(5 + i)| = \sqrt{(5)^2 + (1)^2} = \sqrt{26}$

c) $\left|\frac{(-3-4i)\cdot(2+2i)}{1+i}\right| = \left|\frac{2\cdot(-3-4i)\cdot(1+i)}{1+i}\right| = |-6 - 8i| = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10$

d) $(\sqrt{2}+2i)^8 = ((\sqrt{2}+2i)^2)^4 = ((-2+2\sqrt{2}i))^4 = 2^4 \cdot (-1+2\sqrt{2}i)^4 = 16 \cdot (-1+2\sqrt{2}i)^4$

$$\left|\frac{(\sqrt{2}+2i)^8}{(-1+2\sqrt{2}i)^4}\right| = \left|\frac{16 \cdot (-1+2\sqrt{2}i)^4}{(-1+2\sqrt{2}i)^4}\right| = |16| = 16$$

Questão – 3.13

Solução:

Seja $z = x = yi$

a) $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = 2 \Rightarrow x^2+y^2 = 4$

Portanto a representação gráfica é uma circunferência de centro (0,0) e raio 2

A REPRESENTAÇÃO GEOMETRICA ESTÁ FEITA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

b) $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq 2 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 4$

Portanto a representação gráfica é o conjunto complementar do circulo de centro (0,0) e raio 2

A REPRESENTAÇÃO GEOMETRICA ESTÁ FEITA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

c) $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow 1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x^2+y^2 \leq 4$

Portanto a representação gráfica é a coroa circular entre o circulo de centro(0,0) e raio 1 e o circulo de centro (0,0) e raio 2.

A REPRESENTAÇÃO GEOMETRICA ESTÁ FEITA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 3.14

Solução:

Seja $z = x + yi$

a) $|z| + z = 2 + 4i \Rightarrow (\sqrt{x^2 + y^2} + x) + yi = 2 + 4i \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 16} = 2 - x \Rightarrow x^2 + 16 = 4 - 4x + x^2 \Rightarrow x = -3$

b) $|z - 3i| = |z + 2| \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + y^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow -6y + 9 = 4x + 4 \Rightarrow 4x + 6y - 5 = 0$

c) $|z - 1 + 2i| = 2 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = 2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$

d) $|z - 1 + 2i| \leq 2 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} \leq 2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 4$

Questão – 3.15

Solução:

Seja $z = x + yi$

a) $|z + 2| + |z - 2| = 6 \Rightarrow \sqrt{(x+2)^2 + y^2} + \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 6 - \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \Rightarrow (\sqrt{(x+2)^2 + y^2})^2 = \left(6 - \sqrt{(x-2)^2 + y^2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+2)^2 + y^2 = 36 - 12 \cdot \sqrt{(x-2)^2 + y^2} + (x-2)^2 + y^2$

$\Rightarrow 3 \cdot \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 9 - 2x \Rightarrow \left(3 \cdot \sqrt{(x-2)^2 + y^2}\right)^2 = (9 - 2x)^2$

$\Rightarrow 9 \cdot (x^2 - 4x + 4) + 9y^2 = 81 - 36x + 4x^2 \Rightarrow 5x^2 + 9y^2 = 45 \Rightarrow \frac{5x^2}{45} + \frac{9y^2}{45} = \frac{45}{45} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

Portanto são pontos da elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

A REPRESENTAÇÃO GEOMETRICA ESTÁ FEITA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

b) são os pontos internos da elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

A REPRESENTAÇÃO GEOMETRICA ESTÁ FEITA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 3.16

Solução:

Seja $z = x + yi$

$w = \cos\alpha + i\cdot\text{sen}\alpha \Rightarrow |w| = \sqrt{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha} = 1$

$$\left|\frac{z^2}{w}\right| = 8 \Rightarrow \frac{|z^2|}{|w|} = 8 \Rightarrow \frac{|z|^2}{|w|} = 8 \Rightarrow |z|^2 = 8 \Rightarrow |z| = 2\sqrt{2}$$

Questão – 3.17

Solução:

$$|z| = 1 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 1 \Rightarrow a^2+b^2 = 1$$

$$|w| = 1 \Rightarrow \sqrt{c^2+d^2} = 1 \Rightarrow c^2+d^2 = 1$$

$$\left|\frac{z+w}{z.w}\right| = \frac{|z+w|}{|z|\cdot|w|} = |z+w| = |(a+c)+(b+d)\cdot i| = \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

$$= \sqrt{(a^2+b^2)+(c^2+d^2)+2\cdot(ac+bd)} = \sqrt{2+2\cdot(ac+bd)} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{1+(ac+bd)} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+(ac+bd)} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{1+(ac+bd)} = \sqrt{5} \Rightarrow ac+bd = 4$$

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i = (ac+bd)+(bc-ad)\cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_e\left(\frac{z}{w}\right) = ac+bd = 4$$

Questão – 3.20

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 3.21

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Capítulo 4

A Trigonometria dos Números Complexos

Capítulo 4

Questão – 4.1

Solução:

a) $|z| = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3 \Rightarrow z = 3 = 3 \cdot (1 + 0 \cdot i) = 3 \cdot (\cos 0 + i \cdot \operatorname{sen} 0)$

b) $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2 \Rightarrow z = \sqrt{3} + i = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot i\right) = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$

c) $|z| = \sqrt{(5)^2 + 0^2} = 5 \Rightarrow z = 5i = 5 \cdot (0 + i) = 5 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

d) $|z| = \sqrt{(-3)^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6 \Rightarrow z = -3 + 3\sqrt{3}i = 6 \cdot \left(-\frac{3}{6} + \frac{3\sqrt{3}}{6} \cdot i\right) = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i\right) =$

$= 6 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$

e) $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = 1 \Rightarrow z = -1 = 1 \cdot (-1 + 0 \cdot i) = 1 \cdot (-1 + 0 \cdot i) = 1 \cdot (\cos\pi + i \cdot \operatorname{sen}\pi)$

f) $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow z = -1 - i = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i\right) = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i\right) =$

$= \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$

g) $|z| = \sqrt{(4)^2 + (0)^2} = 4 \Rightarrow z = -4i = 4 \cdot (0 - i) = 4 \cdot (0 - 1 \cdot i) = 4 \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$

h) $|z| = \sqrt{(3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow z = 3 - 3i = 3\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{3}{3\sqrt{2}} - \frac{3}{3\sqrt{2}} \cdot i\right) =$

$= 3\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i\right) = 3\sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$

Questão – 4.2

Solução:

a) $z = 6 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \right) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 3 + 3\sqrt{3} \cdot i$

b) $z = \cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i$

c) $z = 2 \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} \right) = 2 \cdot \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \right] = -\sqrt{3} - i$

Questão – 4.3

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 4.4

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Capítulo 5
Operações na Forma Trigonométrica

Capítulo 5

Questão – 5.5

Solução:

a) $(-\sqrt{3}+i)^{15} = (2)^{15}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{15} = (2)^{15}\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}i\right)^{15} =$

$= (2)^{15}\cdot\left(\cos\frac{75\pi}{6}+\operatorname{sen}\frac{75\pi}{6}i\right) = (2)^{15}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}i\right) = 2^{15}\cdot i$

b) $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{60} = \left(\cos\frac{4\pi}{3}+\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}i\right)^{60} = (\cos 80\pi + \operatorname{sen}80\pi i) = 1$

c) $(-2-2i)^{-18} = (2\sqrt{2})^{-18}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{-18} = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{-18}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}i\right)^{-18}$

$= (2)^{-27}\left(\cos\frac{126\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{126\pi}{4}i\right) = (2)^{-27}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}i\right) = -\frac{i}{2^{27}}$

d) $(-1+\sqrt{3})^{-10} = 2^{-10}\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-10} = 2^{-10}\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}i\right)^{-10} =$

$= 2^{-10}\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}i\right)^{-10}$

$2^{-10}\cdot\left(\cos\left(-\frac{20\pi}{3}\right)+\operatorname{sen}\left(-\frac{20\pi}{3}\right)i\right) = 2^{-10}\cdot\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)i\right) =$

$= 2^{-10}\cdot\left(\left(-\frac{1}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i\right) = -\frac{1}{2^{11}}+\frac{\sqrt{3}}{2^{11}}i$

Questão – 5.6

Solução:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^5-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^7=\left(\cos\frac{\pi}{4}+\text{sen}\frac{\pi}{4}i\right)^5-\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\text{sen}\frac{5\pi}{4}i\right)^7=$$

$$=\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\text{sen}\frac{5\pi}{4}i\right)-\left(\cos\frac{35\pi}{4}+\text{sen}\frac{35\pi}{4}i\right)=\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\text{sen}\frac{5\pi}{4}i\right)-\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\text{sen}\frac{3\pi}{4}i\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$$

Questão – 5.7

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 5.8

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 5.9

Solução:

a) $(1+\sqrt{3}\cdot i)^n=2^n\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n=2^n\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+\text{sen}\frac{\pi}{3}i\right)^n=2^n\cdot\left(\cos\frac{n\pi}{3}+\text{sen}\frac{n\pi}{3}i\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{n\pi}{3}=2\pi\Rightarrow n=6$

b) $(1+\sqrt{3}\cdot i)^n=2^n\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n=2^n\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+\text{sen}\frac{\pi}{3}i\right)^n=2^n\cdot\left(\cos\frac{n\pi}{3}+\text{sen}\frac{n\pi}{3}i\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{n\pi}{3}=\pi\Rightarrow n=3$

Questão – 5.10

Solução:

a) $(-\sqrt{3}+i)^n = (2)^n\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n = (2)^n\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\text{sen}\frac{5\pi}{6}i\right)^n =$

$= (2)^n\cdot\left(\cos\frac{5n\pi}{6}+\text{sen}\frac{5n\pi}{6}i\right) \Rightarrow \frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow n = 3$

b) $(-\sqrt{3}+i)^n = (2)^n\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n = (2)^n\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\text{sen}\frac{5\pi}{6}i\right)^n =$

$= (2)^n\cdot\left(\cos\frac{5n\pi}{6}+\text{sen}\frac{5n\pi}{6}i\right) \Rightarrow \frac{n\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow n = 9$

Questão – 5.15

Solução:

a) $\rho = \sqrt{4^2+(4\sqrt{3})^2} = 8$

$z^2 = 4+4\sqrt{3}i = 8\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right) = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)+\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\cdot i\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \sqrt{8\left(\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}\cdot i\right)}$

$= 2\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right)+\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right)\cdot i\right)$

$= \begin{cases} z = 2\sqrt{2}.\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot i\right) = 2\sqrt{2}.\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\cdot i\right) = \sqrt{6}+\sqrt{2}i \\ z = 2\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+\text{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)\cdot i\right) = 2\sqrt{2}\cdot\left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -\sqrt{6}-\sqrt{2}i \end{cases}$

b) $\rho = \sqrt{(-27)^2 + (0)^2} = 27$

$$z^3 = -27i = 27 \cdot (0 - i) = 27\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) \cdot i\right)$$

$$\Rightarrow z = \sqrt[3]{27\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) \cdot i\right)} =$$

$$= 3 \cdot \left(\cos\left(\frac{3\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) \cdot i\right)$$

$$= \begin{cases} z = 3 \cdot \left(\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{6}\right) \cdot i\right) = 3 \cdot ((0) + (1) \cdot i) = 3i \\ z = 3 \cdot \left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) \cdot i\right) = 3 \cdot \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot i\right) = \left(\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot i\right) \\ z = 3 \cdot \left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right) \cdot i\right) = 3 \cdot \left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot i\right) \end{cases}$$

c) $\rho = \sqrt{(-16)^2 + (0)^2} = 16$

$$z^4 = -16 = 16 \cdot (-1 + 0i) = 16(\cos(\pi + 2k\pi) + \operatorname{sen}(\pi + 2k\pi) \cdot i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \sqrt[4]{16(\cos(\pi + 2k\pi) + \operatorname{sen}(\pi + 2k\pi) \cdot i)}$$

$$= 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right) \cdot i\right) =$$

$$= \begin{cases} z = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot i\right) = 2 \cdot \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \\ z = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \cdot i\right) = 2 \cdot \left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot i\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i \\ z = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) \cdot i\right) = 2 \cdot \left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot i\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i \\ z = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right) \cdot i\right) = 2 \cdot \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot i\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i \end{cases}$$

Questão – 5.16

Solução:

a) $x^3 + 8i = 0 \Rightarrow x^3 = -8i = 8(0 + (-1)\cdot i) == 8\cdot\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) + \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)\cdot i\right)$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{8\cdot\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) + \text{sen}\left(\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)\cdot i\right)\right)} =$$

$$= 2\left(.\cos\left(\frac{3\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + \text{sen}\left(\frac{3\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\cdot i\right)$$

$$= \begin{cases} x = 2\cdot\left(\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) + \text{sen}\left(\frac{3\pi}{6}\right)\cdot i\right) = 2\cdot((0) + (1)\cdot i) = 2i \\ x = 2\cdot\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + \text{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)\cdot i\right) = 2\cdot\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\cdot i\right) = -\sqrt{3} - i \\ x = 3\cdot\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \text{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right)\cdot i\right) = 2\cdot\left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\right) = \sqrt{3} + i \end{cases}$$

b) $x^6 - 1 = 0 \Rightarrow x^6 = 1 = 1(1 + (0)\cdot i) = 1\cdot(\cos(2\pi + 2k\pi) + \text{sen}(2\pi + 2k\pi)\cdot i)$

$$\Rightarrow x = \sqrt[6]{1\cdot(\cos(2\pi + 2k\pi) + \text{sen}(2\pi + 2k\pi)} = 1\cdot\left(\cos\left(\frac{2\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6}\right) + \text{sen}\left(\frac{2\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6}\right)\cdot i\right)$$

$$= \begin{cases} x = 1\cdot\left(\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + \text{sen}\left(\frac{2\pi}{6}\right)\cdot i\right) = 1\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot i\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot i \\ x = 1\cdot\left(\cos\left(\frac{4\pi}{6}\right) + \text{sen}\left(\frac{4\pi}{6}\right)\cdot i\right) = 1\cdot\left(\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot i\right) = -\frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot i \\ x = 1\cdot\left(\cos\left(\frac{6\pi}{6}\right) + \text{sen}\left(\frac{6\pi}{6}\right)\cdot i\right) = 1\cdot((-1) + (0).i) = -1 \\ x = 1\cdot\left(\cos\left(\frac{8\pi}{6}\right) + \text{sen}\left(\frac{8\pi}{6}\right)\cdot i\right) = 1\cdot\left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot i\right) = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot i \\ x = 1\cdot\left(\cos\left(\frac{10\pi}{6}\right) + \text{sen}\left(\frac{10\pi}{6}\right)\cdot i\right) = 1\cdot\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot i\right) = \frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot i \\ x = i\cdot\left(\cos\left(\frac{12\pi}{6}\right) + \text{sen}\left(\frac{12\pi}{6}\right)\cdot i\right) = 1\cdot((1) + (0)\cdot i) = 1 \end{cases}$$

Questão – 5.17

Solução:

a) $y = x^3 \Rightarrow y^2 - 19y - 216 = 0 \Rightarrow \Delta = (-19)^2 - 4\cdot 1\cdot(-216) = 1225 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = \frac{19 \pm 35}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = 27 \\ y = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 = 27 \\ x^3 = -8 \end{cases}$$

Vamos dividir em 2 casos

Caso 1: $x^3 = -8$

Pelo exercício resolvido 5.12 as raízes são $x = -2$ ou $x = 1 \pm \sqrt{3}i$

Caso 2: $x^3 = 27$

$\rho = \sqrt{(27)^2 + (0)^2} = 27$

$x^3 = 27 = 27\cdot(1 + 0\cdot i) = 27(\cos(2\pi + 2k\pi) + \operatorname{sen}(2\pi + 2k\pi)\cdot i)$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{27(\cos(2\pi + 2k\pi) + \operatorname{sen}(2\pi + 2k\pi)\cdot i)} = 3\cdot\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\cdot i\right)$$

$$= \begin{cases} z = 3\cdot\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot i\right) = 3\cdot\left(\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot i\right) = \left(\left(-\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\cdot i\right) \\ z = 3\cdot\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cdot i\right) = 3\cdot\left(\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot i\right) = \left(\left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\cdot i\right) \\ z = 3\cdot\left(\cos\left(\frac{6\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi}{6}\right)\cdot i\right) = 3\cdot((1) + (0\cdot i)) = 3 \end{cases}$$

b) $a = 1\ b = -2i$ e $c = -\frac{9}{4} - 3i \Rightarrow \Delta = (-2i)^2 - 4\cdot 1\cdot\left(-\frac{9}{4} - 3i\right) =$

$= -4 + 9 + 12i = 5 + 12i \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{5 + 12i}$

$$(a + bi)^2 = 5 + 12i \Rightarrow (a^2 - b^2) + 2abi = 5 + 12i \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ 2ab = 12 \end{cases} \Rightarrow a^2 - \left(\frac{6}{a}\right)^2 = 5$$

$$\Rightarrow a^4 - 5a^2 - 36 = 0 \Rightarrow (a^2 - 9)\cdot(a^2 + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \Rightarrow b = 2 \\ a = -3 \Rightarrow b = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2} \\ \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} \dfrac{2i+3+2i}{2} \\ \dfrac{2i-(3+2i)}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} \dfrac{3}{2}+2i \\ -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Questão – 5.18

Solução:

$\sqrt[3]{z} = 8 \Rightarrow z = 512$

$z = -4y \Rightarrow -64y^3 = z^3 = 512 \Rightarrow y^3 = -8$

Pelo exercício resolvido 5.12 temos que $y = -2$ ou $y = 1 \pm \sqrt{3}i$ logo $z = 8$ ou $z = -4 \pm 4\sqrt{3}i$

Questão – 5.19

Solução:

$$z = 3\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \Rightarrow z^4 = 3^4\cdot\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 81\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= 81\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right)\cdot i\right) \Rightarrow \sqrt[4]{81\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right)\cdot i\right)}$$

$$= 3\cdot\left(\cos\left(\frac{\frac{4\pi}{3}+\frac{2k\pi}{4}}{4}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{4\pi}{3}+\frac{2k\pi}{4}}{4}\right)\cdot i\right)$$

$$= \begin{cases} z = 3\cdot\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cdot i\right) = 3\cdot\left(\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot i\right) = \left(\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\cdot i\right) \\ z = 3\cdot\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right)\cdot i\right) = 3\cdot\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot i\right) = \left(\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot i\right) \\ z = 3\cdot\left(\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{3}\right)\cdot i\right) = 3\cdot\left(\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)+\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot i\right)\right) \\ z = 3\cdot\left(\cos\left(\frac{17\pi}{6}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{17\pi}{6}\right)\cdot i\right) = 3\cdot\left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\cdot i\right) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}\right)\cdot i \end{cases}$$

Questão – 5.20

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Problemas Suplementares

Questão – I.1

Solução:

$$x^2 + y^2 + 5i = 13 + xyi \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 5 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 23 \Rightarrow (x + y)^2 = 23 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y = \pm\sqrt{23}$$

Questão – I.2

Solução:

$$z = (tg(\alpha) + i).(cotg(\alpha) + i) \Rightarrow z = (tg(\alpha).cotg(\alpha) + i(tg(\alpha) + cotg(\alpha)) + i^2 =$$

$$= 1 + i(tg(\alpha) + cotg(\alpha)) - 1 = 0 + i(tg(\alpha) + cotg(\alpha)) \Rightarrow \begin{cases} R_e(z) = 0 \\ I_m(z) = tg(\alpha) + cotg(\alpha) \end{cases}$$

Questão – I.3

Solução:

$z = a + bi$

$z^2 = i \cdot \bar{z} \Rightarrow (a + bi)^2 = i(a - bi) \Rightarrow (a^2 - b^2) + 2abi = b + ai$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = b \\ 2ab = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ a = 0 \Rightarrow b^2 + b = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = -1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z = -i \\ z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i \\ z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i \end{cases}$$

Questão – I.4

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – I.5

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – I.6

Solução:

$\bar{z} - \bar{\omega} = 1 - i \Rightarrow z - \omega = 1 + i$

$z^2 - \omega^2 = 6 \Rightarrow (z - \omega)\cdot(z + \omega) = 6 \Rightarrow z + \omega = \frac{6}{1+i} \Rightarrow z + \omega = \frac{6}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{6-6i}{2} = 3 - 3i$

Questão – I.7

Solução:

$$AB = (a + bi) - (b + ai) = a - b + (b - a)\cdot i \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = a - b \\ \text{sen}\alpha = b - a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(270^0 + \alpha) = \cos 270^0 \cdot \cos\alpha - \text{sen}270^0 \cdot \text{sen}\alpha = b - a \\ \text{sen}(270^0 + \alpha) = \text{sen}270^0 \cdot \cos\alpha + \cos 270^0 \cdot \text{sen}\alpha = b - a \end{cases}$$

$z = A + (\cos(270^0 + \alpha) + i\,\text{sen}(270^0 + \alpha)) = b + ai + (b - a + i\cdot(b - a))$

$= 2b - a + bi$

Questão – I.8

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – I.9

Solução:

Seja $z = x + yi$

a) $(1 - 2i)(x + yi) = (x + 2y) + i\cdot(-2x + y)$

Para que este numero real é necessário que:
$-2x+y=0 \Rightarrow y=2x$

A representação geométrica está feita NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

b) $(1-2i)(x+yi)=(x+2y)+i\cdot(-2x+y)$

Para que este numero real positivo é necessário que:
$$\begin{cases}-2x+y=0\\x+2y>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=2x\\x>0,y>0\end{cases}$$

A representação geométrica está feita NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

c) $(1-2i)(x+yi)=(x+2y)+i\cdot(-2x+y)$

Para que este numero real é necessário que:
$$x+2y=0\Rightarrow y=-\frac{x}{2}$$

A representação geométrica está feita NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

d) $(1-2i)(x+yi)=(x+2y)+i\cdot(-2x+y)$

Para que este numero real positivo é necessário que:
$$\begin{cases}x+2y=0\\x+2y<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-\frac{x}{2}\\x>0,y<0\end{cases}$$

A representação geométrica está feita NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – I.10

Solução:

Seja $z = a + bi$

a) $iz + 2\bar{z} + 3 + 3i = 0 \Rightarrow i\cdot(a+bi) + 2\cdot(a-bi) + 3 + 3i = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (-b + 2a + 3) + i\cdot(a - 2b + 3) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} -b + 2a = -3 \\ a - 2b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b + 2a = -3 \\ -2a + 4b = 6 \end{cases} \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow z = -1 + i$$

b) $z = -1 + i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\alpha = -1 \\ \text{sen}\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \arg(z) = \frac{3\pi}{4}$$

c) $z = -1 + i \Rightarrow z^2 = 1 - 2i - 1 = -2i \Rightarrow z^{16} = (-2i)^8 = 2^8 \cdot i^8 = 2^8$

d) $17 + z - i = 17 - 1 + i - i = 16$

$$\sqrt[8]{16} = \sqrt[8]{16\cdot(\cos(2\pi + 2k\pi) + i\,\text{sen}(2\pi + 2k\pi)} =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{2\pi}{8} + \frac{2k\pi}{8}\right) + i\cdot\text{sen}\left(\frac{2\pi}{8} + \frac{2k\pi}{8}\right)\right)$$

A representação geométrica está feita NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Capítulo 6
O Conceito de Polinômios Igualdade

CAPÍTULO 6

Questão – 6.6

Solução:

f(2) = 10 -16 + 24 -32 + 32 = 18

Questão – 6.7

Solução:

$F(1 + 2i) = -1 + 5i \cdot (1 + 2i) - 4 \cdot (1+2i)^2 - 3i \cdot (1 + 2i)^3 + (1 + 2i)^4 = -1 + 5i - 10 - 4 - 16i + 16 - 3i \cdot (1 + 6i - 12 - 8i) + (1 + 4 \cdot 1^3 \cdot (2i) + 6 \cdot 1^2 \cdot (2i)^2 + 4 \cdot 1 \cdot (2i)^3 + (2i)^4 = 1 - 11i - 3i + 18 + 36i - 24 + 1 + 8i - 24 - 32i + 16 = -12 - 2i$

Questão – 6.8

Solução:

$P(x) = -8 + 4 \cdot 2 - 2 \cdot (2)^2 + 7 \cdot (2)^3 - 5 \cdot (2)^4 + 2^5 = -8 + 8 - 8 + 56 - 80 + 32 = 0$

Questão – 6.9

Solução:

$$\begin{cases} a + 2b - c - 3 = 0 \\ 2a - b + 3c + 4 = 0 \\ 3a - 2b + 3c + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b - c = 3 \\ 2a - b + 3c = -4 \\ 3a - 2b + 3c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b - c = 3 \\ 0a - 5b + 5c = -10 \\ 0a - 8b + 6c = -10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2b - c = 3 \\ 0a - 40b + 40c = -80 \Rightarrow 10c = -30 \Rightarrow c = -3 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = 2 \\ 0a + 40b - 30c = 50 \end{cases}$$

Questão – 6.10

Solução:

$$\alpha + \beta x + x^2 = \beta - (\beta + 1)x + x^2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ \beta = -(\beta + 1) \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = -\frac{1}{2}$$

Questão – 6.11

Solução:

Pelo exercício resolvido 6.2. a soma dos coeficientes é P(1)

$P(1) = (-1+1)^{100} = 0$

Logo a soma dos coeficientes é zero

Questão – 6.12

Solução:

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + a + 1 = 0 \\ b - a - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a = -1$$

Capítulo 7
Operações com os Polinômios Grau

Capítulo 7

Questão – 7.8

Solução:

$$P(x) \equiv a \cdot A(x) + b \cdot B(x) + c \cdot C(x) \Rightarrow 3x^5 - 6x^3 + 2x = ax + b(x + x^3) + c \cdot (x + x^3 + x^5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 2 \\ b + c = -6 \quad \Rightarrow b = -9 \Rightarrow a = 8 \\ c = 3 \end{cases}$$

NOTA: Observe que nosso gabarito não está de acordo com o gabarito LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Se a = 8, b = – 9 e c = 8 teríamos que:
$P(x) \equiv a \cdot A(x) + b \cdot B(x) + c \cdot C(x) = 8 \cdot x - 9(x + x^3) + 8 \cdot (x + x^3 + x^5) = 8x^5 - x^3 - 9x$

Se a = 8, b = – 9 e c = 3 teríamos que:
$P(x) \equiv a \cdot A(x) + b \cdot B(x) + c \cdot C(x) = 8 \cdot x - 9(x + x^3) + 3 \cdot (x + x^3 + x^5) = 3x^5 - 6x^3 + 2x$
Portanto o nosso gabarito está correto.

Questão – 7.9

Solução:

a) $(2x^4 - x^3 + x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - 3x + 1) = (2x^6 - 6x^5 + 2x^4) + (-x^5 + 3x^4 - x^3) +$
$+ (x^4 - 3x^3 + x^2) + (x^3 - 3x^2 + x) + (x^2 - 3x + 1) = 2x^6 - 7x^5 + 6x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x + 1$

b) $(x^3 + x^2 - x - 1) \cdot (x^2 - 2x - 1) = (x^5 - 2x^4 - x^3) + (x^4 - 2x^3 - x^2)$
$+ (-x^3 + 2x^2 + x) + (-x^2 + 2x + 1) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x + 1$

Questão – 7.10

Solução:

a) $x = 0 \Rightarrow P(0) + 0 \cdot P(2 - 0) = 0^2 + 3 \Rightarrow P(0) = 3$
$x = 1 \Rightarrow P(1) + 1 \cdot P(2 - 1) = 1^2 + 3 \Rightarrow P(1) = 2$
$x = 2 \Rightarrow P(2) + 2 \cdot P(2 - 2) = 2^2 + 3 \Rightarrow P(2) + 2 \cdot P(0) = 7 \Rightarrow P(2) = 1$

b) RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 7.11

Solução:

Pelo teorema da pagina 103 DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7 Temos que o grau de $g(x) + h(x) \leq 3$.Como $f(x).[g(x)+h(x)]$ é não nulo então $f(x).[g(x)+h(x)]$ temos grau 3, 4, 5 ou 6.

Exemplos:
Se $f(x) = x^3$, $g(x) = x^3 + 1$ e $h(x) = -x^3 \Rightarrow f(x).[g(x)+h(x)] = x^3$ que tem grau 3
Se $f(x) = x^3$, $g(x) = x^3 + x$ e $h(x) = -x^3 \Rightarrow f(x).[g(x)+h(x)] = x^4$ que tem grau 4
Se $f(x) = x^3$, $g(x) = x^3 + x^2$ e $h(x) = -x^3 \Rightarrow f(x).[g(x)+h(x)] = x^5$ que tem grau 5
Se $f(x) = x^3$, $g(x) = x^3 + x^2$ e $h(x) = -x^2 \Rightarrow f(x).[g(x)+h(x)] = x^6$ que tem grau 6

Questão – 7.12

Solução:

$$(x+c)^3 + b\cdot(x+d) = x^3 + 6x^2 + 15x + 14 \Rightarrow x^3 + 3x^2c + 3xc^2 + c^3 + bx + bd =$$
$$= x^3 + 6x^2 + 15x + 14$$
$$\Rightarrow x^3 + x^2(3c) + x(3c^2 + b) + (c^3 + bd) = x^3 + 6x^2 + 15x + 14 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 3c = 6 \\ 3c^2 + b = 15 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow d = 2 \\ c^3 + bd = 14 \end{cases}$$

Questão – 7.13

Solução:

$$f(x) = (x-a)^2\cdot(b-c) + (x-b)^2\cdot(c-a) + (x-c)^2\cdot(a-b) + (b-c)\cdot(c-a)\cdot(a-b)$$
$$= (x^2 - 2ax + a^2)\cdot(b-c) + (x^2 - 2bx + b^2)\cdot(c-a) + (x^2 - 2cx + c^2)\cdot(a-b) +$$
$$+(bc - ab + ac - c^2)\cdot(a-b) = (x^2b - 2abx + a^2b - x^2c + 2acx - a^2c) +$$
$$+(x^2c - 2bcx + b^2c - x^2a + 2abx - ab^2) + (x^2a - 2acx + c^2a - x^2b + 2bcx - c^2b) +$$
$$+(abc - a^2b + a^2c - ac^2 - b^2c + ab^2 - abc + bc^2) = 0$$

Questão – 7.14

Solução:

Se f(x) é cubo perfeito, existe um polinômio g(x) tal que: $f(x) = (g(x))^3$

Observe que se f(x) tem grau 3 então g(x) é um polinômio de grau 1 .Isto é, g(x) é da forma:
g(x) = mx + n

$(mx+n)^3 = x^3 + 4x^2 + ax + b \Rightarrow (mx)^3 + 3\cdot(mx)^2\cdot n + 3\cdot mx\cdot n^2 + n^3 = x^3 + 4x^2 + ax + b$

$$\Rightarrow m^3x^3 + 3\cdot m^2x^2\cdot n + 3.mx.n^2 + n^3 = x^3 + 4x^2 + ax + b \Rightarrow \begin{cases} m^3 = 1 \\ 3m^2n = 4 \\ 3mn^2 = a \\ n^3 = b \end{cases} \Rightarrow m = 1 \Rightarrow n = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow a = 3\cdot 1\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{3} \Rightarrow b = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$$

NOTA: Observe que nosso gabarito não está de acordo com o gabarito LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Note que

$$\left(x+\frac{4}{3}\right)^3 = x^3 + 3\cdot\frac{4}{3}x^2 + 3\cdot x\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^3 = x^3 + 4x^2 + \left(\frac{16}{3}\right)x + \frac{64}{27}$$

Portanto nosso gabarito está correto

Agora vamos ver o gabarito do LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

$$(mx+n)^3 = x^3 + 4x^2 + \frac{16}{3}x + \frac{16}{9} \Rightarrow (mx)^3 + 3\cdot(mx)^2\cdot n + 3\cdot mx\cdot n^2 + n^3 =$$

$$= x^3 + 4x^2 + \frac{16}{3}x + \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow m^3x^3 + 3\cdot m^2x^2\cdot n + 3\cdot mx\cdot n^2 + n^3 = x^3 + 4x^2 + ax + b \Rightarrow \begin{cases} m^3 = 1 \\ 3m^2n = 4 \\ 3mn^2 = \frac{16}{3} \\ n^3 = \frac{16}{9} \end{cases} \Rightarrow m = 1 \Rightarrow n = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow n^3 = \frac{64}{27}$$

Isso mostra que o gabarito do LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7 está errado.

Questão – 7.15

Solução:

a) Se f(x) é quadrado perfeito, existe um polinômio g(x) tal que: $f(x) = (g(x))^2$

Observe que se f(x) tem grau 2 então g(x) é um polinômio de grau 1 .Isto é, g(x) é da forma: g(x) = mx + n

$(mx+n)^2 = (a+bx)^2 + (a'+b'x)^2 \Rightarrow m^2x^2 + 2mnx + n^2 =$

$x^2 \cdot (b^2+(b')^2) + 2x \cdot (ab+a'b') + (a^2+(a')^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2 = b^2 + (b')^2 \\ mn = ab + a'b' \\ n^2 = a^2 + (a')^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2n^2 = (a^2+(a')^2)\cdot(b^2+(b')^2) \\ (mn)^2 = (ab+a'b')^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (a^2+(a')^2)\cdot(b^2+(b')^2) = (ab+a'b')^2 \Rightarrow a^2b^2 + a^2(b')^2 + (a')^2b^2 + (a')^2(b')^2 =$

$= a^2b^2 + 2 \cdot aa'bb' + (a')^2(b')^2 \Rightarrow (ab'-a'b)^2 = 0 \Rightarrow$

$$ab'-a'b = 0 \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

b) Como $(a+bx)^2 + (a'+b'x)^2$ e $(a+cx)^2 + (a'+c'x)^2$ são quadrados perfeitos

então pela letra a temos que : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ e $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$ e dai concluímos que

$\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}$ logo $(b+cx)^2 + (b'+c'x)^2$ é quadrado perfeito.

Questão – 7.16

Solução:

$$S_n = \frac{n^2}{2} \Rightarrow S_1 = a_1 = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{n^2}{2} \Rightarrow S_2 = a_1 + a_2 = \frac{2^2}{2} = \frac{4}{2} \Rightarrow a_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow r = a_2 - a_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

Questão – 7.17

Solução:

Primeira parte: Determinar g(x)

$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow g(x) - g(x-1) = ax^3 + bx^2 + cx + d - (a(x-1)^3 +$

$+b(x-1)^2 + c(x-1) + d) = 3ax^2 - 3ax + a + 2bx - b + c =$

$$= 3ax^2 + x(2b - 3a) + a - b + c = x^2 \Rightarrow \begin{cases} 3a = 1 \\ 2b - 3a = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{3} \Rightarrow b \Rightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{6} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$$

Segunda Parte: Deduzir a formula

$g(1) - g(0) = 1$

$g(2) - g(1) = 4$

$g(3) - g(2) = 9$

.....

$g(n) - g(n-1) = n^2$

$$g(n) - g(0) = 1 + 4 + 9 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} = \frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

Questão – 7.18

Solução:

Primeira Parte: Determinar P(x)

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow P(x) - P(x-1) = ax^3 + bx^2 + cx +$

$+d - (a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d) = 3ax^2 - 3ax + a + 2bx - b + c =$

$$= 3ax^2 + x(2b - 3a) + a - b + c = x^2 - x \Rightarrow \begin{cases} 3a = 1 \\ 2b - 3a = -1 \\ a - b + c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{3} \Rightarrow b \Rightarrow 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{3} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x$$

Segunda Parte: Deduzir a formula

$P(1)-P(0)=1\cdot 0$

$P(2)-P(1)=2\cdot 1$

$P(3)-P(2)=3\cdot 2$

.....

$P(n)-P(n-1)=n\cdot(n-1)$

$$P(n)-P(0)=1\cdot 0+2\cdot 1+3\cdot 2+\ldots+n\cdot(n-1)=\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{3}n=\frac{n^3-n}{3}=\frac{n(n^2-1)}{3}$$

Questão – 7.19

Solução:

$f(x)=ax^2+bx+c$

$f(x^2)=k\cdot f(x)\cdot f(-x)\Rightarrow ax^4+bx^2+c=k\cdot(ax^2+bx+c)\cdot(ax^2-bx+c)$

$\Rightarrow ax^4+bx^2+c=k\cdot(ax^4-abx^3+acx^2+abx^3-b^2x^2+bcx+acx^2-bcx+c^2)$

$$\Rightarrow ax^4+bx^2+c=ka^2x^4+(2ac-b^2)x^2+c^2\Rightarrow\begin{cases}ka^2=a\\2ack-b^2k=b\\c^2k=c\end{cases}$$

Agora vamos dividir em 2 casos:

Caso 1: $c=0$

Se $c=0$ então temos que:

$$\begin{cases}ka^2=a\\-b^2k=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ka^2-a=0\\b+b^2k=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\cdot(ka-1)=0\\b\cdot(bk+1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ka-1=0\\b=0\\bk+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\a=\frac{1}{k}\\b=0\\b=-\frac{1}{k}\end{cases}$$

Como o polinômio tem grau 2 então $a\neq 0$, logo temos que:

$$\begin{cases}a=\frac{1}{k}\\b=0\\b=-\frac{1}{k}\end{cases}$$

Portanto as soluções deste caso são: $(a,b,c) = \left(\left(\frac{1}{k},0,0\right),\left(\frac{1}{k},-\frac{1}{k},0\right)\right)$

Caso 2: $c \neq 0$

$$\begin{cases} ka^2 = a \\ 2ack - b^2k = b \\ c^2k = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a.(ka-1) = 0 \\ 2ack - b^2k = b \\ c(ck-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (ka-1) = 0 \\ 2ack - b^2k = b \Rightarrow c = \frac{1}{k}, a = \frac{1}{k} \\ ck - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k} k - b^2k = b \Rightarrow \frac{2}{k} - b^2k = b \Rightarrow b^2k^2 + bk - 2 = 0 \Rightarrow (bk-1)\cdot(bk+2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{k} \\ b = -\frac{2}{k} \end{cases}$$

Portanto as soluções deste caso são: $(a,b,c) = \left(\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right),\left(\frac{1}{k},-\frac{2}{k},\frac{1}{k}\right)\right)$

Questão – 7.20

Solução:

$$x^2 + px + q = (x-p)\cdot(x-q) \Rightarrow x^2 + px + q = x^2 + (-p-q)x + pq \Rightarrow \begin{cases} pq = q \\ -p - q = p \end{cases}$$

Agora vamos dividir em 2 casos:
Caso 1: $q = 0$
Se $q = 0$ então temos $p = 0$

Caso 2: $q \neq 0$

$$\begin{cases} pq = q \\ -p - q = p \end{cases} \Rightarrow p = 1 \Rightarrow q = -2$$

Questão – 7.21

Solução:

$$x^3 = A(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3) + B(x-1)\cdot(x-2) + C(x-1) + D$$

$$\Rightarrow x^3 = Ax^3 + (-6A+B)x^2 + (11A - 3B - C) + (-6A + 2B - C + D)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ -6A + B = 0 \\ 11A - 3B - C = 0 \\ -6A + 2B - C + D = 0 \end{cases} \Rightarrow B = 6 \Rightarrow C = 7 \Rightarrow D = 1$$

Questão – 7.22

Solução:

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \Rightarrow \frac{x}{x^3-1} = \frac{A\cdot(x^2-x+1)}{(x+1)\cdot(x^2-x+1)} + \frac{(Bx+C)\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}$$

$$x = x^2\cdot(A+B) + x(-A+B+C) + (A+C) \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=1 \\ A+C=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{3} \Rightarrow A = -\frac{1}{3} \Rightarrow B = \frac{1}{3}$$

Questão – 7.23

Solução:

Primeira Parte: Calcular A e B

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x(x+1)} + \frac{B}{(x+1)(x+2)} \Rightarrow \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A(x+2)}{x(x+1)} + \frac{Bx}{(x+1)(x+2)}$$

$$\Rightarrow 1 = x(A+B) + 2A \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2A=1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

Segunda Parte: Provar que:

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right]$$

Prova:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{\frac{1}{2}}{1\cdot 2}-\frac{\frac{1}{2}}{2\cdot 3}$$

$$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}=\frac{\frac{1}{2}}{2\cdot 3}-\frac{\frac{1}{2}}{3\cdot 4}$$

$$\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}=\frac{\frac{1}{2}}{3\cdot 4}-\frac{\frac{1}{2}}{4\cdot 5}$$

.....

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{\frac{1}{2}}{n(n+1)}-\frac{\frac{1}{2}}{(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

Questão – 7.24

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 7.25

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 7.26

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 7.27

Solução:

$P(1) = 3^n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n-1} + a_{2n}$

$P(-1) = 1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots - a_{2n-1} + a_{2n}$

$$3^n + 1 = 2\cdot(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n-2} + a_{2n}) \Rightarrow a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n-2} + a_{2n} = \frac{3^n+1}{2}$$

Capítulo 8
A Divisão de Polinômios

Capítulo 8

Questão – 8.9

Solução:

a)

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 4x^3 + 5x - 6 & x^3 + 2 \\ \hline -x^4 - 2x & x - 4 \\ \hline -4x^3 + 3x - 6 & \\ -4x^3 + 8 & \\ \hline 3x + 2 & \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 2x^3 - 6x + 4 & x^2 + x - 2 \\ \hline -x^5 - x^4 + 2x^3 & x^3 - x^2 + 5x - 7 \\ \hline -x^4 + 4x^3 - 6x & \\ x^4 + x^3 - 2x^2 & \\ \hline 5x^3 - 2x^2 - 6x & \\ -5x^3 - 5x^2 + 10x & \\ \hline -7x^2 + 4x + 4 & \\ 7x^2 + 7x - 14 & \\ \hline 11x - 10 & \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 & x^2 - 3x + 1 \\ \hline -2x^4 + 6x^3 - 2x^2 & 2x^2 + 3x + 11 \\ \hline 3x^3 + 2x^2 - 5x & \\ -3x^3 + 9x^2 - 3x & \\ \hline 11x^2 - 8x + 6 & \\ -11x^2 + 33x - 11 & \\ \hline 25x - 5 & \end{array}$$

d) CORREÇÃO NO ENUNCIADO: $A(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 5x - 6$

$$\begin{array}{l|l} x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 5x + 6 & x^3 - 3x^2 - x + 3 \\ \underline{-x^5 + 3x^4 + x^3 - 3x^2} & x^2 + x - 2 \\ x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x & \\ \underline{-x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x} & \\ -2x^3 + 6x^2 + 2x - 6 & \\ \underline{2x^3 - 6x^2 - 2x + 6} & \\ (0) & \end{array}$$

Questão – 8.10

Solução:

Como o resto da divisão de $x^5 - 2x^4 + ax^3 - 7x^2 + 3x + b$ por $x^2 + 4$ é $3x + 2$ então existe um polinômio Q(x) tal que:

$x^5 - 2x^4 + ax^3 - 7x^2 + 3x + b = (x^2 + 4)Q(x) + 3x + 2$

$x = 2i \Rightarrow (2i)^5 - 2(2i)^2 + a(2i)^3 - 7(2i)^2 + 3(2i) + b = ((2i)^2 + 4)Q(x) + 3(2i) + 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} 38 - 8a = 6 \\ b - 4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 6 \end{cases}$$

Questão – 8.11

Solução:

Fazendo a divisão do polinômio $2x^3 + ax^2 - 10x + b$ pelo polinômio $x^2 - 3x + 1$
Obtemos quociente $2x + (a + 6)$ e resto $(3a + 6)x + b - a - 6$
Portanto para que $2x^3 + ax^2 - 10x + b$ seja divisível por $x^2 - 3x + 1$ devemos ter $a = -2$ e $b = 4$.

Questão – 8.12

Solução:

Se temos um polinômio P(x) de grau 5 dividido por um polinômio G(x) e o resto tem grau 4 então G(x) tem grau maior do que 4 logo só pode ter grau 5 portanto o quociente tem grau zero. Assim temos que $m = 5$ e $q = 0$.

Questão – 8.13

Solução:

$$x^4 - (a+1)x^3 - (a^2+4)x^2 + bx + c \quad \big| \; x^2 - x - 2$$

$$x^2 - ax + (a^2 - a - 2)$$

$$-ax^3 + (a^2+2)x^2 + bx$$

$$-ax^3 - ax^2 - 2ax$$

$$(a^2 - a - 2)x^2 + (b - 2a)x + c$$

$$-(a^2 - a - 2)x^2 + (a^2 - a - 2)x + 2a^2 - 2a - 4$$

$$(b + a^2 - 3a - 2)x + (c + 2a^2 - 2a - 4)$$

a) Portanto o quociente é $x^2 - ax + (a^2 - a - 2)$

b) Para que a divisão seja exata é preciso que

$$\begin{cases} b + a^2 - 3a - 2 = 0 \\ c + 2a^2 - 2a - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -a^2 + 3a + 2 \\ c = -2a^2 + 2a + 4 \end{cases}$$

Questão – 8.14

Solução:

$$x^3 + 3bx^2 + 3cx + d \quad \big| \; x^2 + 2bx + c$$

$$-x^3 - 2bx^2 - cx \qquad x + b$$

$$bx^2 + 2cx + d$$

$$-bx^2 - 2b^2x - bc$$

$$(2c - 2b^2)x + d - bc$$

Para que a divisão seja exata é preciso que:

$$\begin{cases} 2c - 2b^2 = 0 \\ d - bc = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = b^2 \\ d = bc \end{cases} \Rightarrow d = b^3$$

$$x^3 + 3bx^2 + 3cx + d = x^3 + 3bx^2 + 3b^2x + b^3 = (x+b)^3$$

$$x^2 + 2bx + c = x^2 + 2bx + b^2 = (x+b)^2$$

Questão – 8.15

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 8.16

Solução:

$$A(x) = B(x)\cdot Q(x) + R(x) = (2B(x))\cdot\left(\frac{1}{2}Q(x)\right) + R(x)$$

Portanto o quociente é $\frac{1}{2}Q(x)$ e o resto é o mesmo.

Questão – 8.17

Solução:

$$\begin{array}{l|l} 6x^4 + mx^2 + nx + p & 2x^3 - 4x^2 + 3 \\ \underline{-6x^4 + 12x^3 - 9x} & 3x + 6 \\ 12x^3 + mx^2 + (n-9)x & \\ \underline{-12x^3 + 24x^2 - 18} & \\ (m+24)x^2 + (n-9)x + p - 18 & \end{array}$$

Daí temos que:

$$\begin{cases} m + 24 = 1 \\ n - 9 = 0 \\ p - 18 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -23 \\ n = 9 \\ p = 21 \end{cases}$$

Questão – 8.18

Solução:

Seja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Como f(x) dividido por $x^2 - 1$ dá resto 6x + 2 então

$$f(x) = (x^2 - 1)\cdot Q(x) + (6x + 2) \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 8 \\ f(-1) = -4 \end{cases}$$

Como f(x) dividido por $x^2 + 1$ dá resto 2x + 8 então

$$f(x) = (x^2 - 1)\cdot Q'(x) + (6x + 2) \Rightarrow \begin{cases} f(i) = 2i + 8 \\ f(-i) = -2i + 8 \end{cases}$$

Dai temos que:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 8 \\ -a + b - c + d = -4 \\ -ai - b + ci + d = 2i + 8 \\ ai - b - ci + d = -2i + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + d = 2 \\ d - b = 8 \\ a + c = 6 \\ c - a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 4 \\ d = 5 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 5$$

Questão – 8.19

Solução:

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 4mx^3 + 6ax^2 + 4bx + c & x^3 + 3mx^2 + 3ax + b \\ \underline{-x^4 - 3mx^3 - 3ax^2 - bx} & \hline x + m \\ mx^3 + 3ax^2 + 3bx + c & \\ \underline{-mx^3 - 3m^2x^2 - 3amx - bm} & \\ (3a - 3m^2)x^2 + (3b - 3am)x + c - bm & \end{array}$$

Para que a divisão seja exata é preciso que:

$$\begin{cases} 3a - 3m^2 = 0 \\ 3b - 3am = 0 \Rightarrow a = m^2 \Rightarrow b = am = m^3 \Rightarrow c = bm = m^4 \\ c - bm = 0 \end{cases}$$

Questão – 8.20

Solução:

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 1 & x^2 + px + q \\ \underline{-x^4 - px^3 - qx^2} & \hline x^2 - px + (p^2 - q) \\ -px^3 - qx^2 & \\ \underline{px^3 + p^2x^2 + pqx} & \\ (p^2 - q)x^2 + pqx + 1 & \\ \underline{-(p^2 - q)x^2 - (p^3 - pq)x - (p^2q - q^2)} & \\ (-p^3 + 2pq)x + (-p^2q + q^2 + 1) & \end{array}$$

Para que a divisão seja exata é preciso que:

$$\begin{cases} -p^3 + 2pq = 0 \\ -p^2q + q^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p\cdot(-p^2 + 2q) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \Rightarrow q^2 = -1 \Rightarrow q \notin \mathbb{R} \\ -p^2 + 2q = 0 \Rightarrow p^2 = 2q \Rightarrow q^2 = 1 \Rightarrow q = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} p^2 = 2 \Rightarrow p = \pm\sqrt{2} \\ p^2 = -2 \Rightarrow p \notin \mathbb{R} \end{cases} \end{cases} \\ q(-p^2 + q) = -1 \end{cases}$$

Portanto temos que: $q = 1$ e $p = \pm\sqrt{2}$

Questão – 8.21

Solução:

$$\begin{array}{l|l} px^3 + (p^2+q)x^2 + (2pq+r)x + (q^2+s) & x^2 + px + q \\ \underline{-px^3 - p^2x^2 - pqx} & px + q \\ qx^2 + (pq+r)x + q^2 + s & \\ \underline{-qx^2 - pqx - q^2} & \\ rx + s & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} px^3 + (p^2-q)x^2 + rx - q^2 + s & x^2 + px + q \\ \underline{-px^3 - p^2x^2 - pqx} & px - q \\ -qx^2 + (r-pq)x - (q^2) + s) & \\ \underline{qx^2 + pqx + q^2} & \\ rx + s & \end{array}$$

Se A(x) | C(x) então $rx + s = 0$ logo C(x) | B(x)

Questão – 8.22

Solução:

Seja R(x) o resto da divisão então $R(x) = ax^2 + bx + c$ então $P(x) = (x^2+1)(x+1) + R(x)$

Como P(x) dividido por $x + 1$ dá resto 4 então

$P(x) = (x+1)\cdot Q(x) + 4 \Rightarrow P(1) = 4 \Rightarrow R(1) = 4 \Rightarrow a + b + c = 4$

Como P(x) dividido por x^2+1 dá resto 2x + 3 então

$$P(x)=(x^2+1)\cdot Q'(x)+(2x+3)\Rightarrow\begin{cases}P(i)=2i+3\\P(-i)=-2i+3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}R(i)=2i+3=-a+bi+c\\R(-i)=-2i+3=a-bi+c\end{cases}$$

Assim temos que:

$$\begin{cases}a+b+c=4\\2i+3=-a+bi+c\\-2i+3=a-bi+c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b+c=4\\2=b\\c-a=3\end{cases}\Rightarrow c=\frac{9}{2}\Rightarrow a=\frac{3}{2}\Rightarrow R(x)=\frac{3}{2}x^2+2x+\frac{9}{2}$$

Questão – 8.23

Solução:

Seja $R(x) = ax^2 + bx + c$ o resto da divisão de $f(x)$ por $x^3 + 1$
Usando o resultado do exercício 8.6 temos que:
O resto da divisão de R(x) por x + 1 é 2 logo $f(-1) = 2 \Rightarrow a - b + c = 2$
O resto da divisão de R(x) por $x^2 - x + 1$ é $x - 6$

Fazendo a divisão $\frac{ax^2+bx+c}{x^2-x+1}$ encontramos quociente a e resto (a + b)x + (c – a)

Daí montamos o sistema:

$$\begin{cases}a-b+c=2\\a+b=1\\c-a=-6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a+c=3\\c-a=-6\end{cases}\Rightarrow a=3\Rightarrow c=-3\Rightarrow b=-2$$

Logo $R(x) = 3x^2 + 2x - 3$
Portanto $f(x) = (x^3 + 1).(x+2) +(3x^2 + 2x - 3) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x - 1$

Questão – 8.24

Solução:

$$\begin{array}{l|l}-ax^4+bx^3+c & x^2+1\\ -ax^4-ax^2 & \hline ax^2+bx\ -a\\ \hline bx^3-ax^2 & \\ -bx^3-bx & \\ \hline -ax^2-bx+c & \\ -bx+(c+a) & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} ax^4 + bx^3 + c & x^3 + 1 \\ \hline -ax^4 - ax & \\ \hline bx^3 - ax + c & \\ -bx^3 \quad -b & \\ \hline -ax + (c - b) & \end{array}$$

Assim temos que $r_1(x) = -bx + (c + a)$ e $r_2(x) = -ax + (c - b)$

Logo $r_1(x) \cdot r_2(x) =$

$(-bx + (c + a)) \cdot$

$(-ax + (c - b)) = x^2(ab) + x(b^2 - a^2 - bc - ac) + (c^2 + ac - bc - ab)$

$$\Rightarrow \begin{cases} ab = 2 \\ b^2 - a^2 - bc - ac = -12 \\ c^2 + ac - bc - ab = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = 2(I) \\ b^2 - a^2 - bc - ac = -12(II) \\ c^2 + ac - bc = 12(III) \end{cases}$$

Somando (II) +(III) temos que:

$c^2 - 2bc + (b^2 - a^2) = 0 \Rightarrow \Delta = (-2bc)^2 - 4.c^2.(b^2 - a^2) = 4a^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2a$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = b + a \\ c = b - a \end{cases}$$

Caso 1: $c = b - a$

Substituindo em II temos que

$b^2 - a^2 - bc - ac = -12 \Rightarrow b^2 - a^2 - c(a + b) = -12 \Rightarrow b^2 - a^2 - (b - a)(a + b) = -12$

$\Rightarrow b^2 - a^2 - (b^2 - a^2) = -12 \Rightarrow 0 = -12$

Portanto este caso não tem solução

Caso 2: $c = b + a$

Substituindo em II temos que

$b^2 - a^2 - bc - ac = -12 \Rightarrow b^2 - a^2 - c(a + b) = -12 \Rightarrow b^2 - a^2 - (b + a)(a + b) = -12$

$\Rightarrow b^2 - a^2 - (b^2 + 2ab + a^2) = -12 \Rightarrow -2a^2 - 2ab = -12 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow c = 3$

Capítulo 9

A Divisão de Polinômios em que o Divisor é de Grau 1

Capítulo 9

Questão – 9.18

Solução:

a) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8 \;\big|\; x - 1$

$-x^4 + x^3$ — $x^3 - x^2 + 3x - 3$

$-x^3 + 4x^2$

$x^3 - x^2$

$3x^2 - 6x$

$-3x^2 + 3x$

$-3x + 8$

$3x - 3$

(5)

b) $2x^5 - 5x^3 - 8x \;\big|\; x + 3$

$-2x^5 - 6x^4$ — $2x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 39x + 109$

$-6x^4 - 5x^3$

$6x^4 + 18x^3$

$13x^3 - 8x$

$-13x^3 - 39x^2$

$-39x^2 - 8x$

$39x^2 + 117x$

$109x$

$-109x - 327$

(-327)

c) **CORREÇÃO NO ENUNCIADO**: $A(x) = 4x^3 + x^2$

$4x^3 + x^2 \;\big|\; x + 1 + i$

$-4x^3 + (-4 - 4i)x^2$ — $4x^2 + (-3 - 4i)x + (-1 + 7i)$

$(-3 - 4i)x^2$

$(3 + 4i)x^2 + (-1 + 7i)x$

$(-1 + 7i)x$

$(1 - 7i)x + (8 - 6i)$

$(8 - 6i)$

d) $x^3 - x^2 - x$ | $x - 1 + 2i$

$-x^3 + (1-2i)x^2$ | $x^2 + (-2i)x + (-5-2i)$

$(-2i)x^2 - x$

$(2i)x^2 + (-4-2i)x$

$(-5-2i)x$

$(5+2i)x - 9 + 8i$

$(-9+8i)$

e) $4x^3 - 8x^2 + 6x + 10$ | $2x - 8$

$-4x^3 + 16x^2$ | $2x^2 + 4x + 19$

$8x^2 + 6x$

$-8x^2 + 32x$

$38x + 10$

$-38x + 152$

(162)

f) $6x^2 - 7x + 8$ | $3x + 4$

$-6x^2 - 8x$ | $2x - 5$

$-15x + 8$

$15x + 20$

(28)

Questão – 9.19

Solução:

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$
Como f(x) dividido por x – 1 dá resto 1 então f(1) = 1
Como f(x) dividido por x – 2 dá resto 8 então f(2) = 8
Como f(x) dividido por x – 3 dá resto 27 então f(3) = 27

Daí montamos o sistema:

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a+2b+c=8 \\ 9a+3b+c=27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=1 \\ 0a-2b-3c=4 \\ 0a-6b-8c=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=1 \\ 0a-2b-3c=4 \\ 0a+0b+c=6 \end{cases}$$

$\Rightarrow c = 6 \Rightarrow b = -11 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow f(x) = 6x^2 - 11x + 6$

Questão – 9.20

Solução:

Como f(x) é divisível por x + 2 então f(– 2) = 0

Logo $5\cdot(-2)^4 - 6(-2)^3 + 4\cdot(-2)^2 - m(-2) + 2 = 0 \Rightarrow m = -73$

Questão – 9.21

Solução:

Usando a definição do dispositivo de Briot-Rufini temos que:

$$\begin{cases} b = 4 \\ 4a + 13 = 1 \\ a + c = -5 \\ -5a + d = 4 \\ 4a + e = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = -3 \\ c = -2 \\ d = -11 \\ e = 12 \end{cases}$$

Questão – 9.22

Solução:

Utilizando o dispositivo de Briot- Rufini temos que:

	1	0	0	0	...	0	0	$-a^n$
a	1	$-a$	a^2	$-a^3$	...	$(-1)^{n-2}a^{n-2}$	$(-1)^n a^{n-1}$	$(-1)^n a^n - a^n$

Portanto o quociente é $Q(x) = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + ... + (-1)^n a^{n-1}$ e o resto é $(-1)^n a^n - a^n$. Logo se n é par o resto é zero e se o n é impar então o resto é $-2a^n$.

Questão – 9.23

Solução:

Utilizando o dispositivo de Briot- Rufini temos que:

	1	0	0	0 ...	0	0	a^n
a	1	a	a^2	a^3 ...	a^{n-2}	a^{n-1}	$2a^n$

Portanto o quociente é $Q(x) = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + ... + a^{n-1}$ e o resto é $(-1)^n a^n - a^n$. Logo se n é par o resto é zero e se o n é impar então o resto é $2a^n$.

Questão – 9.24

Solução:

Como f(x) é divisível por x + 3 então f(– 3) = 0

Logo $a(-3)^3 + b\cdot(-3)^2 - 28(-3) + 15 = 0 \Rightarrow -3a + b = -11$

Como f(x) dividido por x – 3 dá resto – 60 então f(3) = – 60

Logo $a(3)^3 + b\cdot(3)^2 - 28(3) + 15 = -60 \Rightarrow 3a + b = 1$

Daí podemos montar o sistema:

$$\begin{cases} -3a + b = -11 \\ 3a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow b = -5 \Rightarrow a = 2$$

Questão – 9.25

Não foi dado o polinômio portanto é impossível resolver esta questão

Questão – 9.26

Solução:

a) Note que $x^2 - 3x + 2 = (x-1).(x-2)$
Observe que $f(1) = (1-2)^{100} + (1-1)^{50} - 1 = 0$ e portanto f(x) é divisível por x – 1

Observe que $f(2) = (2-2)^{100} + (2-1)^{50} - 1 = 0$ e portanto f(x) é divisível por $x - 2$

Logo f(x) é divisível por $x^2 - 3x + 2 = (x-1).(x-2)$

b) Observe que $f(0) = (0+1)^{2n} + (0)^{2n} - 2.0 - 1 = 0$ e portanto f(x) é divisível por x

Observe que $f(-1) = (-1+1)^{2n} + (1)^{2n} - 2.(-1) - 1 = 0$ e portanto f(x) é divisível por $x + 1$

Observe que $f(0) = \left(-\frac{1}{2}+1\right)^{2n} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n} - 2.\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$ e portanto f(x) é divisível por $(2x + 1)$

Logo f(x) é divisível por $x.(x+1).(2x+1)$

Questão – 9.27

Solução:

$x = -a \Rightarrow (a+b+x)^n - a^n - b^n - x^n = b^n - a^n - b^n - (-a)^n = 0$ portanto o polinômio é divisível por $x + a$

$x = -b \Rightarrow (a+b+x)^n - a^n - b^n - x^n = a^n - a^n - b^n - (-b)^n = 0$ portanto o polinômio é divisível por $x + b$

Questão – 9.28

Solução:

$$\begin{array}{l|l} 2x^5 - 15x^3 + 12x^2 + 7x - 6 & x^3 - 7x + 3 \\ \underline{-2x^5 + 14x^3 - 12x^2} & 2x^2 - 1 \\ -x^3 + 7x - 6 & \\ \underline{x^3 - 7x + 6} & \\ (0) & \end{array}$$

Questão – 9.29

Solução:

$P(x) = (x-1)Q((x) + 3$
$P(x) = (x-2)Q'((x) + 4$
$P(x) = (x-1)(x-2)Q''((x) + (ax + b)$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(1) = a + b = 3 \\ P(2) = 2a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow R(x) = x + 2$$

Questão – 9.30

Solução:

$A(x) = (x^2 + 1).Q(x) + ax + b$

$$\begin{cases} A(i) = ai + b \\ A(-i) = -ai + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(i) + A(-i) = 2b \Rightarrow b = \dfrac{A(i) + A(-i)}{2} \\ A(-i) - A(i) = 2ai \Rightarrow a = \dfrac{A(-i) - A(i)}{2i} = i \cdot \left(\dfrac{A(-i) - A(i)}{2} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow R(x) = i \cdot \left(\frac{A(-i) - A(i)}{2} \right) x + \frac{A(i) + A(-i)}{2}$$

Questão – 9.31

Solução:

Note que $x^2 + x - 2 = (x + 2) \cdot (x - 1)$

Seja $R(x) = ax + b$ o resto da divisão de $x^{100} + 2x^{99} - 3x^3 + 2x + 5$ por $x^2 + x - 2$

Daí temos que $x^{100} + 2x^{99} - 3x^3 + 2x + 5 = \left(x^2 + x - 2\right).Q(x) + ax + b$

Note que se $x = 1$ então temos que $a + b = 7$
Note que se $x = -2$ então temos que $-2a + b = 25$
Resolvendo o sistema temos que $b = 13$ e $a = -6$ logo $R(x) = -6x + 13$

Questão – 9.32

Solução:

$A(x) = (-x^2 + 5x - 6).Q(x) + ax + b$

$$\begin{cases} A(2) = 2a + b = 1 \\ A(-1) = -a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow (2a + b) + (-2a + 2b) = 7 \Rightarrow b = \frac{7}{3} \Rightarrow a = -\frac{2}{3} \Rightarrow R(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$$

Questão – 9.33

Solução:

$P(x) = (x-1)Q((x) - 1$
$P(x) = (x-2)Q'((x) - 1$
$P(x) = (x+1)Q''((x) + 5$
$P(x) = (x^2-1)(x-2)Q'''((x) + (ax^2 + bx + c)$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(1) = a+b+c = -1 \\ P(2) = 4a+2b+c = -1 \\ P(-1) = a-b+c = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c = -1 \\ 0a-2b-3c = 3 \\ 0a+2b+0c = -6 \end{cases} \Rightarrow b = -3 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow R(x) = x^2 - 3x + 1$

Questão – 9.34

Solução:

$P(x) = (x-1)(x+2)Q((x) + 2x + 5 \Rightarrow P(1) = 2 + 5 = 7$
$P(x) = (x-1)Q'((x) + R(x) \Rightarrow P(1) = R(1) = 7 \Rightarrow R(x) = 7$
$P(x) = (x-1)(x+2)Q((x) + 2x + 5 \Rightarrow P(-2) = -4 + 5 = 1$
$P(x) = (x-1)Q'((x) + R(x) \Rightarrow P(-2) = R(-2) = -4 + 5 = 1 \Rightarrow R(x) = 1$

Questão – 9.35

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 9.36

Solução:

$f(x) = (ax + b)(q(x) + r$

a) $f(x) = (ax + b)(q(x)) + r = \left(x + \frac{b}{a}\right)(aq(x)) + r$

b) $f(x) = (ax + b)(q(x)) + r \Rightarrow x.f(x) = (ax + b)(x.q(x)) + rx$
$g(x) = x.f(x) = (ax + b)(q_1(x)) + R$

Note que $f\left(-\frac{b}{a}\right) = g\left(-\frac{b}{a}\right) = 0 \Rightarrow r \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) = R \Rightarrow -\frac{br}{a} = R$

c) $f(x) = (ax + b)(q(x)) + r \Rightarrow x^2.f(x) = (ax + b)(x^2.q(x)) + rx^2$
$h(x) = x.f(x) = (ax + b)(q_1(x)) + R$

Note que $f\left(-\frac{b}{a}\right) = h\left(-\frac{b}{a}\right) = 0 \Rightarrow r\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)^2 = R \Rightarrow \frac{b^2 r}{a^2} = R$

Questão – 9.37

CORREÇÃO NO ENUNCIADO: O polinômio f(x) ,quando dividido por x – 1, dá resto a, dividido por x – 2 dá resto b. O quociente f(x) por x – 1 é q(x). Qual é o resto de q(x) por x – 2?

Solução:

$f(x) = (x – 1)q(x) + a \Rightarrow f(1) = a$ e $f(2) = q(2) + a$
$f(x) = (x – 2)\,Q(x) + b \Rightarrow f(2) = b \Rightarrow q(2) = b – a$
Logo o resto da divisão de q(x) por x – 2 é b – a

Questão – 9.38

Solução:

Pelo exercício resolvido 9.16 temos que:
$f(x) – 6 = (x – 1)(x – 2)(x – 3).q(x)$

Como f(x) – 6 tem grau 3 então temos que:
$f(x) – 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3).k$

Como f(x) é divisível por x – 4 então f(4) = 0
$f(4) – 6 = (4 – 1)(4 – 2)(4 – 3).k \Rightarrow k = – 1 \Rightarrow f(x) = –(x – 1)(x – 2)(x – 3) + 6$

Questão – 9.39

Solução:

$$\begin{array}{l|l} ax^4 + bx^3 + 1 & x^2 - 2x + 1 \\ \underline{-ax^4 + 2ax^3 - ax^2} & \\ (2a + b)x^3 - ax^2 + 1 & \\ \underline{(-2a + b)x^3 + (4a + 2b)x^2 - (2a + b)x} & \\ (3a + 2b)x^2 + (-2a - b)x + 1 & \\ \underline{-(3a + 2b)x^2 + (6a + 4b)x + (-3a - 2b)} & \\ (4a + 3b)x + (-3a - 2b + 1) & \end{array} \qquad ax^2 + (2a + b)x + (3a + 2b)$$

Para que a divisão seja exata é preciso que:

$$\begin{cases} 4a + 3b = 0 \\ -3a - 2b + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 3 \Rightarrow b = -4$$

Questão – 9.40

Solução:

$$\begin{array}{l} x^5 + px + q \\ \underline{-x^5 + 2ax^4 - a^2x^3} \\ 2a\,x^4 - a^2x^3 \\ \underline{-2ax^4 + 4a^2x^3 - 2a^3x^2} \\ 3a^2\,x^3 - 2a^3x^2 + px \\ \underline{-3a^2\,x^3 + 6a^3x^2 - 3a^4x} \\ 4a^3x^2 + (p - 3a^4)x + q \\ \underline{-4a^3x^2 + 8a^4x - 4a^5} \\ (5a^4 + p)x + (q - 4a^5) \end{array} \qquad \left| \begin{array}{l} x^2 - 2ax + a^2 \\ \hline x^3 + 2ax^2 + 3a^2x + 4a^3 \end{array} \right.$$

Para que a divisão seja exata é preciso que:

$$\begin{cases} 5a^4 + p = 0 \\ q - 4a^5 = 0 \end{cases} \Rightarrow q = 4a^5,\ p = -5a^4$$

Questão – 9.41

Solução:

Utilizando o dispositivo de Briot- Rufini temos que:

	1	-1	0	0	...	0	n -1	1 - 2n	n
1	1	0	0	...		0	n -1	- n	0
1	1	1	1	....		1	n	0	
1	1	2	3	....		n	2n		

Portanto p(x) é divisível por $(x - 1)^2$ mas não é divisível por $(x - 1)^3$.

Quando dividimos p(x) por $(x-1)^3$ obtemos quociente $q(x) = x^n + x^{n-1} + ...+ x + n$ e resto 2n

Questão – 9.42

Solução:

Utilizando o dispositivo de Briot- Rufini temos que:

	1	-1	0	0	...	0	$-n.a^{n-1}$	$n.a^n$	a^n
a	1	a	a^2	a^3	...		a^{n-2}	$(1-n)a^{n-1}$	0
a	1	2a	$3a^2$	$4a^3$ ...			$(n-1)a^{n-2}$	0	

Portanto p(x) é divisível por $(x-a)^2$.

Quando dividimos p(x) por $(x-a)^2$ obtemos quociente $q(x) = x^{n-2} + 2a.x^{n-3} + ...+ (n-1)a^{n-2}$ e resto zero

Questão – 9.43

Solução:

Utilizando o dispositivo de Briot-Rufini temos que:

	1	–a	b	– b	2	– 1
1	1	– a + 1	b – a + 1	– a + 1	– a + 3	– a + 2

Portanto – a + 2 = 0 logo a = 2

Utilizando o dispositivo de Briot-Rufini temos que:

	1	– 2	b	– b	2	– 1
1	1	– 1	b – 1	– 1	1	0
1	1	0	b – 1	b – 2	b – 1	

Portanto b – 1 = 0 logo b = 1

Utilizando o dispositivo de Briot-Rufini temos que:

	1	– 2	b	– b	2	– 1
1	1	– 1	b – 1	– 1	1	0
1	1	0	0	–1	0	
1	1	1	1	0		
1	1	2	3	3		

Portanto temos que m = 3

Questão – 9.44

Solução:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} +$$

$$(x).(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 16 \end{vmatrix} + (x^2)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} +$$

$$+(x^3)\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = -2x^3 + 6x^2 - 6x + 2 = -2(x-1)^3$$

Questão – 9.45

Solução:

Utilizando o dispositivo de Briot- Rufini temos que:

	p	– 2a	19	– 20
p	2	2p – a	$2p^2 - ap + 19$	$2p^4 - ap^3 + 19p^2 - 20p + 12$
p	2	4p – a	$6p^2 - 2ap + 19$	$8p^3 - 3ap^2 + 38p - 20$

Dai temos que:

$$\begin{cases} 2p^4 - ap^3 + 19p^2 - 20p + 12 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{-2p^4 - 19p^2 + 20p - 12}{-p^3} \\ 8p^3 - 3ap^2 + 38p - 20 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{-8p^3 - 38p + 20}{-3p^2} \end{cases}$$

$$\frac{-2p^4 - 19p^2 + 20p - 12}{-p^3} = \frac{-8p^3 - 38p + 20}{-3p^2} \Rightarrow -2p^4 + 19p^2 - 40p + 36 = 0$$

$$\Rightarrow (p-2)(-2p^3 - 4p^2 + 11p - 18) = 0$$

Seja $h(x) = -2p^3 - 4p^2 + 11p - 18$

Pelo teste da raiz racional as raízes racionais são os divisores de 9.Portanto os candidatos a raízes inteiras e positivas são 1,3 e 9. Note que $h(1) = -13$, $h(3) = -75$ e $h(9) = -1701$. Logo a única raiz inteira e positiva é 2.

$$a = \frac{-8p^3 - 38p + 20}{-3p^2} = 10$$

Questão – 9.46

Solução:

Pelo enunciado concluímos que:

$$\begin{cases} f(x) = (x+2)q(x) \\ f(x) = (x+1)q_1(x) + 3 \\ f(x) = (x-1)^2(ax+b) - 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-2) = 0 \\ f(-1) = 3 \\ f(x) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (a-2b)x + b - 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -18a + 9b - 9 = 0 \\ -4a + 4b = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow f(x) = (x-1)^2(2x+5) - 9 = 2x^3 + x^2 - 8x - 4$$

NOTA: OBSERVE QUE NOSSO GABARITO NÃO CONDIZ COM O GABARITO DO LIVRO

Se dividirmos $2x^3 + x^2 - 8x - 4$ por $(x - 1)^2$ obtemos quociente $2x + 5$ e resto -9
Se dividirmos $2x^3 + x^2 - 8x + 15$ por $(x - 1)^2$ obtemos quociente $2x + 5$ e resto 10
Portanto o gabarito do livro está errado.

Questão – 9.47

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 9.48

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 9.49

Solução:

Note que $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$
Pela formula de Moivre: $(\cos\alpha + i\text{sen}\alpha)^n = (\cos(n\alpha) + i\text{sen}(n\alpha))$

$f(i) = (\cos\varphi + i\text{sen}\varphi)^n - \cos(n\varphi) - i\text{sen}(n\varphi)) =$

$= \cos(n\varphi) + i\text{sen}(n\varphi) - \cos(n\varphi) - i\text{sen}(n\varphi)) = 0$

$f(-i) = (\cos\varphi - i\text{sen}\varphi)^n - \cos(n\varphi) + i\text{sen}(n\varphi)) =$

$= \cos(n\varphi) - i\text{sen}(n\varphi) - \cos(n\varphi) + i\text{sen}(n\varphi)) = 0$

Portanto f(x) é divisivel por $x^2 + 1$.

Capítulo 10
Outros Temas Importantes

Capítulo 10

Exercícios Propostos

Questão – 10.6

Solução:

a) Usando a definição do polinômio derivado temos que:
$p'(x) = (3.5)x^2 - (2.3)x + 1 = 15x^2 - 6x + 1$

b) Usando a definição do polinômio derivado temos que:

$$p'(x) = \left(3 \cdot \frac{1}{3}\right)x^2 - \left(4 \cdot \frac{3}{2}\right)x^3 + \left(5 \cdot \frac{13}{5}\right)x^4 - (2 \cdot 6)x^5 + \left(7 \cdot \frac{4}{7}\right)x^6 =$$

$$= x^2 - 6x^3 + 13x^4 - 12x^5 + 4x^6$$

c) $p(x) = (x^2 + x + 1) \cdot (x + 4) = x^3 + 5x^2 + 5x + 4$
Usando a definição do polinômio derivado temos que: $p'(x) = 3x^2 + 10x + 5$

d) Usando a propriedade IV temos que:
$p'(x) = 3(5x^2 + 7)^2.(10x) = 30x.(5x^2 + 7)^2$

e) Usando a propriedade IV temos que:
$p'(x) = 5.(1 + 5x - 8x^2)^4.(5 - 16x)$

f) Usando a propriedade IV temos que:
$p'(x) = m(a + bx)^{m-1}.(b) = (bm).(a + bx)^{m-1}$

Questão – 10.7

Solução:

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$
Assim temos que: $f'(x) = 2ax + b$

$$\begin{cases} f(0) = 4 \\ f'(1) = 2 \\ f'(2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 4 \\ 2a + b = 2 \\ 4a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = 3 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 4$$

Questão – 10.8

Solução:

$P'(x) = 15x^2 + 2ax + b$

$P''(x) = 30x + 2a$

$P(x) + k(x-1).P'(x) + (x^2 - 1).P''(x) \equiv 0$

$\Rightarrow (5x^3 + ax^2 + bx + c) + k \cdot (x-1) \cdot (15x^2 + 2ax + b) + (x^2 - 1)(30x + 2a)$

$= (35 + 15k)x^3 + (3a + 2ak - 15k)x^2 + (b + bk - 2ak - 30)x + (c - bk - 2a)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 35 + 15k = 0 \\ 3a + 2ak - 15k = 0 \\ b + bk - 2ak - 30 = 0 \\ c - bk - 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow k = -\frac{7}{3} \Rightarrow a = 21 \Rightarrow b = 51 \Rightarrow c = -77$$

Questão – 10.9

Solução:

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$

Assim temos que: $f'(x) = 2ax + b$

$f(x) \cdot f'(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot (2ax + b) = 2a^2x^3 + 3abx^2 + (b^2 + 2ac) + bc = 2x^3 + 6x^2 + 1x + 6$

$$\begin{cases} 2a^2 = 2 \\ 3ab = 6 \\ b^2 + 2ac = 10 \\ bc = 6 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow c = 3 \\ a = -1 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow c = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = x^2 + 2x + 3 \\ f(x) = -x^2 - 2x - 3 \end{cases}$$

Questão – 10.10

Solução:

a) $p(x) = 5x^4$

$p'(x) = 5.4x^3 = 20x^3$

$p''(x) = 5.4.3.x^2 = 60x^2$

$p'''(x) = 5.4.3.2.x^2 = 120x$

b) $p(x) = 3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 8$

$p'(x) = 12x^3 + 15x^2 - 8x$

$p''(x) = 36x^2 + 30x - 8$

$p'''(x) = 72x + 30$

$p''''(x) = 72$

Questão – 10.11

Idem ao Exercicio Resolvido 10.5

Questão – 10.12

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 10.13

Solução:

a)

$$\begin{array}{l} x^5 - x^4 + x^3 + 4x^2 - 2x + 3 \\ \underline{-x^5 + 2x^4 - \frac{5}{2}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x} \\ x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{1}{2}x + 3 \\ \underline{-x^4 + 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{2} \end{array} \qquad \left| \begin{array}{l} 2x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 2x - 3 \\ \hline \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} 2x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 2x - 3 \\ \underline{-2x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 18x} \\ -6x^3 + 11x^2 - 16x - 3 \\ \underline{6x^3 + 6x^2 - 18x + 54} \\ 17x^2 - 34x + 51 \end{array} \qquad \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{2} \\ \hline 4x - 12 \end{array} \right.$$

$\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}$ | $17x^2-34x+51$

$-\frac{1}{2}x^3+x^2-\frac{3}{2}x$ | $\frac{1}{34}x+\frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}x^2-3x+\frac{9}{2}$

$-\frac{3}{2}x^2+3x-\frac{9}{2}$

(0)

Logo o mdc normalizado é

$\frac{17x^2-34x+51}{17}=x^2-2x+3$

b)

$4x^5-20x^4+25x^3+10x^2-20x-8$ | $20x^4-80x^3+75x^2-20x-20$

$-4x^5+16x^4-15x^3-4x^2+4x$ | $\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}$

$-4x^4+10x^3+6x^2-16x-8$

$4x^4-16x^3+15x^2+4x-4$

$-6x^3+21x^2-12x-12$

$20x^4-80x^3+75x^2-20x-20$ | $-6x^3+21x^2-12x-12$

$-20x^4+70x^3-40x^2-40x$ | $-\frac{10}{3}x+\frac{5}{3}$

$-10x^3+35x^2-20x-20$

$10x^3-35x^2+20x+20$

(0)

Logo o mdc normalizado é

$\frac{-6x^3+21x^2-12x-12}{-6}=x^3-\frac{7}{2}x^2+2x+2$

c) $x^3 + 3x^2 - 8x - 24 = x^2(x+3) - 8(x+3) = (x+3)(x^2-8) = (x+3)(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})$

$x^3 + 3x^2 - 3x - 9 = x^2(x+3) - 3(x+3) = (x+3)(x^2-3) = (x+3)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

Logo o mdc normalizado é $x + 3$

d)

$$\begin{array}{l} 2x^4 + 7x^3 - 2x^2 - 3x + 14 \\ \underline{-2x^4 - 7x^3 - 10x^2 - 35x} \\ -12x^2 - 38x + 14 \end{array} \qquad \begin{array}{|l} 2x^3 + 7x^2 + 10x + 35 \\ \hline x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x^3 + 7x^2 + 10x + 35 \\ \underline{-2x^3 - \frac{38}{6}x^2 + \frac{14}{6}x} \\ \frac{4}{6}x^2 + \frac{74}{6}x + 35 \\ \underline{-\frac{4}{6}x^2 - \frac{38}{18}x + \frac{14}{18}} \\ \frac{92}{9}x + \frac{322}{9} \end{array} \qquad \begin{array}{|l} -12x^2 - 38x + 14 \\ \hline -\frac{1}{6}x - \frac{1}{18} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -12x^2 - 38x + 14 \\ \underline{12x^2 + \frac{3864}{92}x} \\ 4x + 14 \\ \underline{-4x - 14} \\ (0) \end{array} \qquad \begin{array}{|l} \frac{92}{9}x + \frac{322}{9} \\ \hline -\frac{108}{92}x + \frac{36}{92} \end{array}$$

Logo o mdc normalizado é

$$\frac{\frac{92}{9}x + \frac{322}{9}}{\frac{46}{9}} = 2x + 7$$

e)

$$x^4+12x-8 \quad \Big| \; 2x^3-x^2+4x+15$$
$$-x^4+\frac{1}{2}x^3-2x^2+\frac{15}{2}x \quad \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{2}x^3-2x^2+\frac{9}{2}x-5$$
$$-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2-x-\frac{15}{4}$$
$$-\frac{7}{4}x^2+\frac{7}{2}x-\frac{35}{4}$$

$$2x^3-x^2+4x+15 \quad \Big| \; -\frac{7}{4}x^2+\frac{7}{2}x-\frac{35}{4}$$
$$-2x^3+4x^2-10x \quad -\frac{8}{7}x-\frac{12}{7}$$
$$3x^2-6x+15$$
$$-3x^2+6x-15$$
$$(0)$$

Logo o mdc normalizado é

$$\frac{-\frac{7}{4}x^2+\frac{7}{2}x-\frac{35}{4}}{-\frac{7}{4}} = x^2-2x+5$$

Questão – 10.14

Solução:
Como os polinômios já estão fatorados então o mdc é os fatores comuns de menor expoente
Note que $a(x) = (x-1)^3 . (x+1)^5$ e $b(x) = (x+1)(x-1)(x^2-x+1)$
Portanto o mdc é $(x-1)(x+1)$

Questão – 10.15

Solução:
Como os polinômios já estão fatorados então o mdc é os fatores comuns de menor expoente
Portanto o mdc é $(x-1)^2.x$

Questão – 10.16

Solução:

$$\begin{array}{l|l} x^2+(c+6)x+4c+2 & x^2+(c+2)x+2c \\ \underline{-x^2-(c+2)x-2c} & \hline 1 \\ 4x+(2c+2) & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^2+(c+2)x+2c & 4x+(2c+2) \\ \underline{-x^2-\left(\frac{c}{2}+\frac{1}{2}\right)x} & \hline \frac{1}{4}x+\left(\frac{c+3}{8}\right) \\ \left(\frac{c}{2}+\frac{3}{2}\right)x+2c & \\ \underline{-\left(\frac{c}{2}+\frac{3}{2}\right)x-\left(\frac{c^2+4c+3}{4}\right)} & \\ -\left(\frac{c^2-4c+3}{4}\right) & \end{array}$$

$$\frac{c^2-4c+3}{4}=0 \Rightarrow (c-1)(c-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} c=1 \\ c=3 \end{cases}$$

Questão – 10.17

Solução:

Note que $x^2 + 2x - 1 = (x - (-1+\sqrt{2}\,).(x - (-1-\sqrt{2}\,))$
Vou fazer o caso em que mdc não é 1. O conjunto complementar em relação aos reais é o conjuntos dos valores tais que o mdc é 1.
Para que o mdc não seja 1 é preciso que $p(-1+\sqrt{2}\,) = 0$ e/ou $p((-1-\sqrt{2}\,) = 0$
$p(-1+\sqrt{2}\,) = 0 \Rightarrow (29 - m + n) + (-21\sqrt{2} + m\sqrt{2}\,) = 0 \Rightarrow m = 21 \Rightarrow n = -8$
$p(-1-\sqrt{2}\,) = 0 \Rightarrow (29 - m + n) + (21\sqrt{2} - m\sqrt{2}\,) = 0 \Rightarrow m = 21 \Rightarrow n = -8$

Portanto o mdc só não será 1 se $m = 21$ e $n = -8$.
Logo o mdc será 1 se $m \neq 21$ e/ou $n \neq -8$

NOTA: Note que nosso gabarito diverge do gabarito do livro Noções de Matemática volume 7

) gabarito do livro não contempla o caso que $m \neq 21$ e $n \neq -8$
lote se $m = n = 0$ então $p(x) = 2x^4 - x^3 - 4x^2$. Neste caso que $p(-1+\sqrt{2}) = 29 - 21\sqrt{2}$ e $p(-1-\sqrt{2}) = 29 + 21\sqrt{2}$ portanto os polinômios são primos entre si.
) gabarito do livro não contempla o caso que $m \neq 21$ e $n = -8$
lote se $m = 0$ e $n = -8$ então $p(x) = 2x^4 - x^3 - 4x^2 - 8$. Neste caso que $p(-1+\sqrt{2}) = 21 - 21\sqrt{2}$ e $p(-1-\sqrt{2}) = 21 + 21\sqrt{2}$ portanto os polinômios são primos ntre si.

Questão – 10.18

Solução:

$p(x) = x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2 - 9)(x^2 - 4) = (x-3)(x+3)(x-2)(x+2)$
Note que $a(-2) = a(3) = a(1) = a(-1) = 0$
$a(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x+2)(x-3)(x-1)(x+1)$

Logo o mmc(a(x), b(x)) =
$(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)(x-1)(x+1) = x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36$

Questão – 10.19

Solução:

CORREÇÃO NO ENUNCIADO: $a(x) = x^{14} - 2x^{13} + x^{12}$

Note $a(1) = 0$ e $a(-1) = 4$ logo $a(x)$ é divisível por $x - 1$, mas não é divisível por $x + 1$
Logo mdc(a(x),b(x)) = $x - 1$ e mmc(a(x),b(x)) =
$(x^{14} - 2x^{13} + x^{12}) \cdot (x+1) = x^{15} - x^{14} - x^{13} + x^{12}$

Exercícios Suplementares

Questão – II.1

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – II.2

Solução:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} \Rightarrow \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a(x+1)}{x(x+1)} + \frac{bx}{x(x+1)} \Rightarrow \frac{1}{x(x+1)} = \frac{(a+b)x+a}{x(x+1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow b=-1 \Rightarrow \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}$$

Questão – II.3

Solução:

Antes de fazermos este problema eu vou provar um lema
LEMA: Encontre todas as funções continuas tais que: f(x + y) = f(x) + f(y) para todo x e y complexos

Prova:
Faça y = 0 daí temos que f(x + 0) = f(x) + f(0) ⇒ f(0) = 0
Faça y = – x daí temos que f(x + (–x)) = f(x) + f(–x)) ⇒ f(– x) = – f(x)
Faça y = x daí temos que f(x + x) = f(x) + f(x)) ⇒ f(2x) = 2. f(x)
Vamos provar por indução que f(nx) = n.f(x) para todo n natural

Prova:
Para n = 1 temos que f(1.x) = 1.f(x)
Suponhamos a propriedade valida para n = k, isto é. f(k.x) = k.f(x)
Vamos mostrar que a propriedade vale n = k + 1
f(kx + k) = f(kx) + f(x) = k.f(x) + f(x) = (k + 1).f(x)
Logo a propriedade vale para todo k natural.

Faça $x = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{m}{n}.\ n = m\ .1 \Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\cdot n\right) = f(m.1) \Rightarrow n.f\left(\frac{m}{n}\right) = m.f(1) \Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right) =$

$\frac{m}{n}.f(1)$

Faça f(1) = c. Daí temos que f(x) = c.x para todo x racional.

Seja b um numero irracional então existe uma sequencia de racionais x_n tal que $\lim x_n = b$. Assim temos que:

$f(b) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} cx_n = cx$

Daí temos que f(x) = c.x para todo x real.

Seja x = c + di um numero complexo então existe uma sequencia de reais x_n tal que $\lim y_n = c$ e uma sequencia z_n tal que $\lim z_n = d$.Assim temos que:

$f(c + di) = \lim_{n\to\infty} f(y_n + z_n i) = f(\lim_{n\to\infty} y_n) + i \cdot f(\lim_{n\to\infty} z_n) = \lim_{n\to\infty} c(c + di)x_n = cx$

Daí temos que f(x) = c.x para todo x complexo.

Agora vamos resolver o nosso problema

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Faça f(0) = a e y = 0 daí temos que:

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)+a}{2} \Rightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x+y)+a}{2} = \frac{f(x)+f(y)}{2} \Rightarrow f(x+y)+a = f(x)+f(y)$$

Faça g(x) = f(x) – a. Assim temos que:

g(x + y) = g(x) + g(y)

Logo pelo lema temos que g(x) = cx

Portanto f(x) = cx + a.

Questão – II.4

Solução:

$$\frac{a}{10^x-1}+\frac{b}{10^x+2} = \frac{2.10^x+3}{(10^x-1)(10^x+2)} \Rightarrow \frac{a(10^x+2)}{(10^x-1)(10^x+2)} + \frac{b(10^x-1)}{(10^x-1)(10^x+2)} =$$

$$= \frac{2.10^x+3}{(10^x-1)(10^x+2)} \Rightarrow \frac{(a+b)10^x+2a-b}{(10^x-1)(10^x+2)} = \frac{2.10^x+3}{(10^x-1)(10^x+2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ 2a-b=3 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{5}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{3}$$

Questão – II.5

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – II.6

Solução:

Sabemos que $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

Daí temos que:

$(1+1)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$

$(2+1)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$

$(3+1)^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$

.....

$(n+1)^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$

Somando tudo membro a membro temos que:

$(n+1)^3 = 1^3 + 3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (n+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow (n+1)^3 - 1^3 - 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n) - (n+1) = 3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} =$

$\dfrac{1}{3}n^3 + \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{6}n \Rightarrow a = \dfrac{1}{3},\ b = \dfrac{1}{2},\ c = \dfrac{1}{6}$

Questão – II.7

Solução:

Seja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$\begin{cases} f(-2) = -9 \\ f(-1) = -1 \\ f(1) = 3 \\ f(2) = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8a + 4b - 2c + d = -9 (I) \\ -a + b - c + d = -1 (II) \\ a + b + c + d = 3 (III) \\ 8a + 4b + 2c + d = 11 (IV) \end{cases}$$

Somando (II) + (III) e (I) + (IV) temos que:

$$\begin{cases} -8a-4b-2c+d=-9 (I) \\ -a+b-c+d=-1 (II) \\ a+b+c+d=3 (III) \\ 8a+4b+2c+d=11 (IV) \\ 2b-2d=2 (V) \\ 8b+2d=2 (VI) \end{cases} \Rightarrow b=0 \Rightarrow d=1 \Rightarrow \begin{cases} a+c=2 \\ 8a+2c=10 \end{cases} \Rightarrow 6a=6 \Rightarrow a=1 \Rightarrow c=1 \Rightarrow f(0)=1$$

Questão – II.8

Solução:

Como f(x) dividido por x + 3 dá quociente q(x) e resto – 5 temos que:
$f(x) = (x + 3)q(x) - 5$ (I)

Como q(x) dividido por 2x – 1 tem resto 4 temos que: $q(x) = (2x - 1)s(x) + 4$(II)

Substituindo (II) em (I) temos que: $f(x) = (x + 3)[(2x - 1)s(x) + 4] - 5 = [(x + 3)((2x - 1)s(x)] + 4x + 7$. Portanto o resto da divisão por $(x + 3)(2x - 1)$ é $4x + 7$

Questão – II.9

Solução:

Note que $A(x) = x^2 + px + q$ e $A(x) = x^4 + px^2 + q$

$$\begin{array}{l|l} x^4+px^2+q & x^2+px+q \\ \hline -x^4-px^3-qx^2 & x^2+px+(p^2+p-q) \\ \hline -px^3+(p-q)x^2+q & \\ px^3+p^2x^2+pqx & \\ \hline (p^2+p-q)x^2+pqx+q & \\ -(p^2+p-q)x^2+(-p^3-p^2+pq)-qp^2-pq+q^2 & \\ \hline ((-p^3-p^2+2pq)x-(q^2+q-pq-qp^2) & \end{array}$$

$$\begin{cases} -p^3-p^2+2pq=0 \\ q^2+q-pq-qp^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(-p^2-p+2q)=0 \\ q(q+1-p-p^2)=0 \end{cases}$$

Agora vamos dividir em 2 casos:

Caso 1: $p = 0$

Se $p = 0$ então $q.(q+1) = 0$ logo $q = 0$ ou $q = -1$

Caso 2: $p \neq 0$

$$\begin{cases} \dfrac{p^2+p}{2} = 0 \Rightarrow p = -1 \Rightarrow q = 0 \\ \dfrac{p^2+p}{2} = p^2 + p - 1 \Rightarrow p^2 + p - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 1 \Rightarrow q = 1 \\ p = -2 \Rightarrow q = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Portanto as soluções são $(0,0),(0,-1),(1,1),(-2,1)(-1,0)$

Questão – II.10

Solução:

$$\begin{array}{l|l} ax^3 + bx^2 + cx + d & x^2 - x + 2 \\ \underline{-ax^3 + ax^2 - 2ax} & \overline{ax + (b+a)} \\ (b+a)x^2 + (c-2a)x + d & \\ \underline{-(b+a)x^2 + (a+b)x - 2\cdot(b+a)} & \\ (b+c-a)x + (d-2b-2a) & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} ax^3 + bx^2 + cx + d & x^2 + x - 1 \\ \underline{-ax^3 - ax^2 + ax} & \overline{ax + (b-a)} \\ (b-a)x^2 + (c+a)x + d & \\ \underline{-(b-a)x^2 - (b-a)x + (b-a)} & \\ (c-b+2a)x + (b-a+d) & \end{array}$$

Daí temos que:

$$\begin{cases} -a+b+c=5 \\ -2a-2b+d=-7 \\ 2a-b+c=12 \\ -a+b+d=-1 \end{cases} \begin{cases} -a+b+c=5 \\ 0a-4b-2c+d=-17 \\ 0a+b+3c=22 \\ 0a+0b+c-d=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a+b+c=5 \\ 0a+0b+c-d=6 \\ 0a+0b+10c+d=71 \\ 0a-4b-2c+d=-17 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10c+d=71 \\ c-d=6 \end{cases} \Rightarrow c=7 \Rightarrow d=1 \Rightarrow b=1 \Rightarrow a=3$$

Portanto $f(x) = 3x^3 + x^2 + 7x + 1$

Questão – II.11

Solução:

Faça $x - 2 = y$. Daí teremos que dividir $y^n - 1$ por $y - 1$. Faça a divisão usando o exercício resolvido 9.7 e usando $a = 1$.

Questão – II.12

Solução:

a) $P(x) = T(x)\,q(x) + R(x) \Rightarrow P(x) = (x^2 - (a+b)x + ab)\,q(x) + (mx + n)$
Daí temos que:
$P(a) = am + n$ e $P(b) = bm + n \Rightarrow P(a) - P(b) = (a - b)m$

$$\Rightarrow m = \frac{P(a)-P(b)}{a-b} \Rightarrow n = \frac{aP(b)-bP(a)}{a-b}$$

b) $P(x) = T(x)\,q(x) + R(x) \Rightarrow x^{200} = (x^2 - x - 2)\,q(x) + (mx + n)$
$P(-1) = -m + n$ e $P(2) = 2m + n$

$$\Rightarrow \begin{cases} -m+n=1 \\ 2m+n=2^{200} \end{cases} \Rightarrow m = \frac{2^{200}-1}{3} \Rightarrow n = \frac{2^{200}+2}{3}$$

c) Vamos provar por indução que $2^{2s} - 1$ é divisível por 3 para todo s natural positivo
I) Para $s = 1$ temos que $2^{2s} - 1 = 3$ portanto é divisível por 3
II) Suponhamos a propriedade valida para um certo k, isto é, $2^{2k} - 1 = 3r$ (H.I.)

III) Vamos provar que a propriedade para k + 1
$2^{2k} - 1 = 3r \Rightarrow 2^{2k} = 3r + 1 \Rightarrow 4.2^{2k} = 4.(3r + 1) \Rightarrow 2^{2k+1} - 1 = 3(4r + 1)$

Portanto temos que $2^{2s} - 1$ é sempre divisível por 3

Questão – II.13

Solução:

a) Como o resto da divisão de f(x) por (x – b)(x – c) é 3x – 1então f(x) = (x – b)(x – c)q(x) + 3x – 1
Logo:

$$\begin{cases} f(b) = 3b - 1 \\ f(c) = 3c - 1 \end{cases}$$

Como o resto da divisão de f(x) por (x – a)(x – c) é x + 1então f(x) = (x – a)(x – c)t(x) + x + 1
Logo:

$$\begin{cases} f(a) = a + 1 \\ f(c) = c + 1 \end{cases}$$

Como o resto da divisão de f(x) por (x – b)(x – a) é 2x + 3 então f(x) = (x – b)(x – a)s(x) + 2x + 3
Logo:

$$\begin{cases} f(b) = 2b + 3 \\ f(a) = 2a + 3 \end{cases}$$

Assim temos que

$$\begin{cases} 3b - 1 = 2b + 3 \\ a + 1 = 2a + 3 \\ 3c - 1 = c + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = -2 \\ c = 1 \end{cases}$$

b) Como (x – a)(x – b)(x – c) então o resto tem grau no máximo 2 logo o quociente é do tipo $r(x) = mx^2 + nx + p$. Sendo assim temos que $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c).v(x) + mx^2 + nx + p$.

Logo temos que:

$$\begin{cases} f(1)=2 \\ f(-2)=-1 \\ f(4)=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+n+p=2 \\ 4m-2n+p=-1 \\ 16m+4n+p=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+n+p=2 \\ 0m-12n-15p=-21 \\ 0m-6n-3p=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+n+p=2 \\ 0m-12n-15p=-21 \\ 0m+0n-9p=-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p=\frac{1}{3} \Rightarrow n=\frac{4}{3} \Rightarrow m=\frac{1}{3}$$

Questão – II.14

Solução:

Como f(x) dividido por x – 5 dá quociente g(x) e resto 3 temos que: f(x) = (x – 5)g(x) + 3(I)

Como g(x) dividido por x – 3 tem resto 2 temos que: g(x) = (x – 3)q(x) + 2(II)

a) Substituindo (II) em (I) temos que: f(x) = (x – 5) ((x – 3)q(x) + 2) + 3 = (x – 5) ((x – 3)q(x) + 2x – 7 = (x – 5) ((x – 3)q(x) + 2(x – 3) – 1 = [(x – 3)((x – 5)] . [q(x) + 2] – 1. Portanto o resto da divisão por x – 3 é – 1

b) Substituindo (II) em (I) temos que: f(x) = (x – 5) [(x – 3)q(x) + 2] + 3 = [(x – 5) ((x – 3)q(x)] + 2x – 7. Portanto o resto da divisão por (x – 3)(x – 5) é 2x – 7

Questão – II.15

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – II.16

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – II.17

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – II.18

Solução:

Seja w uma raiz do polinômio $x^2 + x + 1$ então $w^3 = 1$

$w^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (w-1)\cdot(w^2+w+1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} w = 1 \\ w^2 + w + 1 = 0 \Rightarrow w = \dfrac{-1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \begin{cases} w = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\cdot \operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3} \text{ (I)} \\ w = \cos\dfrac{4\pi}{3} + i\cdot \operatorname{sen}\dfrac{4\pi}{3} \text{ (II)} \end{cases} \end{cases}$$

Agora vamos dividir em 3 casos

Caso 1: m é múltiplo de 3, isto é $m = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$

Seja w uma raiz do polinômio $x^2 + x + 1$ então $w^{6k} + w^{3k} + 1 = 3$ portanto não é raiz.

Caso 2: m deixa resto 1 na divisão por 3, isto é $m = 3s + 1$, $s \in \mathbb{Z}$

Seja w uma raiz do polinômio $x^2 + x + 1$ então $w^{2m} + w^m + 1 = 0$, pois x^{2m} e x^m são as raízes (I) e (II).

Caso 3: m deixa resto 2 na divisão por 3, isto é $m = 3r + 2$, $r \in \mathbb{Z}$

Seja w uma raiz do polinômio $x^2 + x + 1$ então $w^{2m} + w^m + 1 = 0$, pois x^{2m} e x^m são as raízes (I) e (II).

Portanto o polinômio $x^{2m} + x^m + 1$ é divisível por $x^2 + x + 1$ quando m não é divisível por 3.

Questão – II.19

Solução:

a) $p(1) = 1 + 1^3 + 1^9 + 1^{27} + 1^{81} + 1^{243} = 6$
$p(x) = (x-1)Q(x) + k \Rightarrow P(1) = k \Rightarrow k = 6$

b) $p(-1) = -1 + (-1)^3 + (-1)^9 + (-1)^{27} + (-1)^{81} + (-1)^{243} = -6$
$p(x) = (x-1)q(x) + ax + b \Rightarrow p(1) = a + b = 6$ e $p(-1) = -a + b = -6 \Rightarrow b = 0$ e $a = 6$, logo o resto é $6x$.

Questão – II.20

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – II.21

Solução:

$A(x) = x^3 - 3x^2 + px + 1 \Rightarrow A'(x) = 3x^2 - 6x + p \Rightarrow A''(x) = 6x - 6$

Para A(x) seja divisível por A''(x) é preciso A(1) = 0 logo $1 - 3 + p - 1 = 0 \Rightarrow p = 1$

Questão – II.22

Solução:

a) $f(x) = x^3 + ax \div b \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + a \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = -1 - a + b = 4 \\ f'(-1) = 3 + a = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -3 \Rightarrow b = 2$

b) $(x-1)^2(x+p) = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow x^3 + (p-2)x^2 + (1-2p)x + p = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow p = 2$

Questão – II.23

Solução:

a) Seja $P_1(x) = ax^2 + bx + c$ e $P_2(x) = dx^2 + ex + f$

$\varphi(P_1(x) + P_1(x)) = \varphi((a+d)x^2 + (b+e)x + (c+f)) = (a+d)x^2 + (b+e)x + (c+f) +$

$+(x-1)(2x(a+d) + (b+e) = \left[(ax^2 + bx + c) + (x-1)(2ax + b)\right] +$

$+\left[(dx^2 + ex + f) + (x-1)(2dx + e)\right] = \varphi(P_1(x) + P_2(x))$

b) $\varphi(k \cdot P(x)) = \varphi(kax^2 + kbx + kc) = (kax^2 + kbx + kc) + (x-1)(2ka + kb) =$

$= k \cdot (ax^2 + bx + c) + (x-1)(2a + b) = k \cdot \varphi(P(x))$

Questão – II.24

Solução:

$$\begin{array}{l|l} x^3 + (t+1)x^2 + 2x + 2u & x^3 + tx^2 + u \\ \hline -x^3 - tx^2 - u & 1 \\ \hline x^2 + 2x + u & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 + tx^2 + u & x^2 + 2x + u \\ -x^3 - 2x^2 - xu & \overline{x + (t-2)} \\ \hline (t-2)x^2 - ux + u & \\ -(t-2)x^2 - (2t-4)x - u(t-2) & \\ \hline (-u - 2t + 4)x + (3u - ut) & \end{array}$$

Daí temos que:

$$\begin{cases} -u - 2t + 4 = 0 \\ 3u - ut = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \Rightarrow u = -2 \\ u = 0 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$$

Capítulo 11
Equações Algébricas

Capítulo 11

Questão – 11.14

Solução:

Seja $P(x) = (2 + i)x^2 + (-3 + i)x + (1 - 2i)$
Note que $P(1) = 2 + i - 3 + i + 1 - 2i = 0$

Seja b a outra raiz então pelas relações de Girard temos que:

$$b = \frac{1-2i}{2+i} = \frac{1-2i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i} = -i$$

Logo $P(x) = (2 + i)(x - 1)(x + i)$

Questão – 11.15

Solução:

a) Como os fatores do polinômio são todos de grau 1 então o grau do polinômio é a soma dos expoentes. Logo os grau é 1 + 3 + 2 + 7 = 13

b) Como o polinômio tem grau 13 ele tem que ter 13 raízes

c) tem 4 raízes distintas. As raízes são 5, –6, $\sqrt{2}-4$ e $\frac{3}{4}+\frac{2i}{5}$

d) As raízes são 5 com multiplicidade 1, –6 com multiplicidade 3, $\sqrt{2}-4$ com multiplicidade 2 e $\frac{3}{4}+\frac{2i}{5}$ com multiplicidade 7.

e) $\sqrt{3}$ pois todos os fatores do polinômio são monicos, isto é, tem termo de maior grau 1.

Questão – 11.16

Solução:

Como – 4 é raiz então o polinômio é divisível por x + 4

$$\frac{x^3 - x^2 - 14x + 24}{x+4} = x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$$

Portanto as raízes são {2, 3, – 4}

Questão – 11.17

Solução:

Como $\frac{1}{2}$ é raiz então o polinômio é divisível por $2x - 1$

$$\frac{2x^3 - 9x^2 + 14x - 24}{2x - 1} = x^2 - 4x + 5$$

$$x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = -4 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i \\ x = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i \end{cases}$$

$$2x^3 - 9x^2 + 14x - 24 = 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x - (2 + i)) \cdot (x - (2 - i))$$

Questão – 11.18

Solução:

Como – 1 e 2 são raízes então o polinômio é divisível por $x^2 - x - 2$

$$\frac{x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6}{x^2 - x - 2} = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$$

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 1)$$

Questão – 11.19

Solução:

Como – 2 é raiz dupla então o polinômio é divisível por $x^2 - 4x + 4$

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 13x^2 + 36x + 36}{x^2 - 4x + 4} = x^2 + 9 = (x - 3i)(x + 3i)$$

$$x^4 + 4x^3 + 13x^2 + 36x + 36 = (x + 2)^2 \cdot (x + 3i) \cdot (x - 3i)$$

Questão – 11.20

Solução:

Sejam a e b as outras duas raízes então pelas relações de Girard temos que

$$\begin{cases} a+b+(2-i)=\dfrac{7}{3} \\ ab(2-i)=1+2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{1}{3}+i \\ ab=\dfrac{1+2i}{3(2-i)}=\dfrac{1}{3}\cdot i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \Rightarrow b=i \\ b=\dfrac{1}{3} \Rightarrow a=i \end{cases}$$

Logo a decomposição do polinômio é $3.(x-(2-i))\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-i)$

Questão – 11.21

Solução:

Como 4 é raiz então o polinômio é divisível por $x-4$

$$\frac{x^3-5x^2-8x+48}{x-4}=x^2-x+12=(x-4)(x+3)$$

$$x^3-5x^2-8x+48=2\cdot(x-4)^2\cdot(x+3)$$

Questão – 11.22

Solução:

Como -4 é raiz então o polinômio é divisível pro $x+4$

$$\frac{x^5+12x^4+47x^3+52x^2+48x-64}{x+4}=x^4+8x^3+15x^2-8x-16$$

Note -4 ainda é raiz do polinômio $x^4+8x^3+15x^2-8x-16$ logo o polinômio é divisível por $x+4$

$$\frac{x^4+8x^3+15x^2-8x-16}{x+4}=x^3+4x^2-x-4$$

Note -4 ainda é raiz do polinômio x^3+4x^2-x-4 logo o polinômio é divisível por $x+4$

$$\frac{x^3+4x^2-x-4}{x+4}=x^2-1=(x-1)(x+1)$$

Portanto -4 é raiz tripla.

Questão – 11.23

Solução:

$$\begin{array}{l|l} x^4-10x^3+24^2+px+q & x^2-10x+25 \\ \underline{-x^4+10x^3-25x^2} & x^2+10x-1 \\ -x^2+px+q & \\ \underline{x^2-10x+25} & \\ x(p-10)+q+25 & \end{array}$$

Assim temos que:

$$\begin{cases} p-10=0 \\ q+25=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=10 \\ q=-25 \end{cases}$$

Questão – 11.24

Solução:

Para que zero seja raiz dupla é preciso o coeficiente de x^2 não seja zero, o coeficiente de x seja zero e o termo independente seja zero. Sendo assim temos que:

$$\begin{cases} r-6\neq 0 \\ 3s-2=0 \\ t-9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r\neq 6 \\ s=\dfrac{2}{3} \\ t=9 \end{cases}$$

Questão – 11.25

Solução:

Como – 3 é raiz temos que P(– 3) = 0

$$(-3)^4+k\cdot(-3)^3+(k-1)(-3)^2-18=0 \Rightarrow k=-\frac{3}{2}$$

Questão – 11.26

Solução:

Note que $P(3) = 27 + 9k - 45 + 12 - 3k + 6 - 6k = 0$
Logo o polinômio é divisível por $x - 3$

$$\begin{array}{l} x^3 + (k-5)x^2 + (4-k)x + 6 - 6k \\ \underline{-x^3 + 3x^2} \\ (k-2)x^2 + (4-k)x \\ \underline{-(k-2)x^2 + (3k-6)x} \\ (2k-2)x + 6 - 6k \\ \underline{-(2k-2)x - 6 + 6k} \\ (0) \end{array} \qquad \begin{array}{|l} x - 3 \\ \hline x^2 + (k-2)x + (2k-2) \end{array}$$

Questão – 11.27

Solução:

$P(x) = k(x-i)^2(x+2)x = k(x^4 + (2-2i)\cdot x^3 + (-1-4i)x^2 - 2x)$
$\Rightarrow P(-1) = -2ki \Rightarrow -2ki = -10i \Rightarrow k = 5 \Rightarrow P(x) = 5x^4 + (10-10i)\cdot x^3 - (5+20i)x^2 - 10x)$

Questão – 11.28

Solução:

Como a soma dos coeficiente é 6 então $P(1) = 6$
$P(x) = k(x-4)(x+2)(x-3) = k(x^3 - 5x^2 - 2x + 24)$

$$\Rightarrow P(1) = 18k \Rightarrow 18k = 6 \Rightarrow k = \frac{1}{3} \Rightarrow P(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 8$$

Questão – 11.29

Solução:

$x^3 - 2x^2 - x + 9 = 3x^2 + x - 15 \Rightarrow x^3 - 5x^2 - 2x + 24$
Como 4 é raiz então o polinômio é divisível por $x - 4$

$$\frac{x^3 - 5x^2 - 2x + 24}{x - 4} = x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$

Portanto as raizes são $\{-2, 3, -4\}$

Questão – 11.30

Solução:

É fácil ver que o polinômio é divisível por x^2
Como 3 é raiz então o polinômio é divisível por $x - 3$
Portanto o polinômio é divisível por $x^3 - 3x^2$

$$\frac{x^5 - 9x^4 + 26x^3 - 24x^2}{x^3 - 3x^2} = x^2 - 6x - 8 = (x-2)(x-4)$$

Portanto as raízes são {0, 2, 3, 4}

Questão – 11.31

Solução:

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x^2+3}{5x^2-8x+3} \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

Como 2 é raiz então o polinômio é divisível por $x - 2$

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x-2} = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

Note que 1 não é raiz pois $\frac{1}{x-1}$ tem que existir

Logo as raízes são apenas 2 e 3

Questão – 11.32

Solução:

Como 2 é raiz então o polinômio é divisível por $x - 2$

$$\frac{x^3 - 2x - 4}{x-2} = x^2 + 2x + 2$$

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = -4 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-2+2i}{2} = -1+i \\ x = \dfrac{-2-2i}{2} = -1-i \end{cases}$$

Logo as raízes são apenas 2, $-1 - i$ e $-1 + i$

Questão – 11.44

Solução:

Note que P(3) = P(-3) = 0 logo o polinômio é divisível por $x^2 - 9$

$$\frac{x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 - 36x - 108}{x^2 - 9} = x^3 + 3x^2 + 4x + 12$$

Note que – 3 é raiz do polinômio $x^3 + 3x^2 + 4x + 12$ logo o polinômio é divisível por x + 3

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 4x + 12}{x + 3} = x^2 + 4 = (x - 2i)(x + 2i)$$

Portanto $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 - 36x - 108 = (x+3)^2(x-3)(x-2i)(x+2i)$

Questão – 11.45

Solução:

$x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 - 36x - 108 = (x+3)^2(x-3)(x-2i)(x+2i) = (x+3)^2(x-3)(x^2+4)$

Note que $(x + 3)^2$ e $(x^2 + 4)$ são positivos logo para que $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 - 36x - 108 < 0$ é preciso que $(x - 3) < 0$ logo $x < 3$. Observe que se x = 3 então $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 - 36x - 108 = 0$ .Portanto a solução é $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3, x \neq -3\}$

Questão – 11.46

Solução:

$$x^2 + (2 - \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0 \Rightarrow \Delta = 7 + 4\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3} - 2 + 2 + \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ x = \dfrac{\sqrt{3} - 2 - 2 - \sqrt{3}}{2} = -2 \end{cases}$$

Questão – 11.47

Solução:

Note que $\dfrac{x^6 - 1}{x + 1} = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$

As raízes da equação $x^6 - 1 = 0$ são os números da forma:

$$w = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{(k-1)\pi}{3}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{(k-1)\pi}{3}\right), \; k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Observe que se $k = 3$ então $w = \cos(\pi) + i.\text{sen}(\pi) = -1$

Logo se $k = 3$ então w não é solução de $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$

Portanto as soluções da equação $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ são os números da forma:

$$w = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{(k-1)\pi}{3}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{(k-1)\pi}{3}\right), \; k = 0, 1, 2, 4, 5$$

Logo $S = \{1, w, w^2, w^4, w^5\}$ onde $w = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Questão – 11.48

Solução:

Faça $1 - \frac{3}{z} = w$

$$1 - \frac{3}{z} = w \Rightarrow \frac{3}{z} = w - 1 \Rightarrow \frac{z}{3} = \frac{1}{w-1} \Rightarrow z = \frac{3}{w-1}$$

$$(z-3)^5 = z^5 \Rightarrow \left(\frac{z-3}{z}\right)^5 = 1 \Rightarrow \left(1 - \frac{3}{z}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{5}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{5}\right), \; k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$w = \cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{5}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{5}\right), \; k = 0, 1, 2, 3, 4 \Rightarrow z = \frac{3}{1-w}$$

Onde $w = \cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{5}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{5}\right), \; k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Questão – 11.49

Solução:

Seja $P(x) = x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 20x + 24$

Note que $P(2) = P(3) = 0$

$$\frac{x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 20x + 24}{x^2 - 5x + 6} = x^2 + 4 = (x - 2i)(x + 2i)$$

Logo as raízes são apenas 2, 3, 2i e – 2i

Questão – 11.50

Solução:

a) Seja $P(x) = (x-1).(x-r_1).(x-r_2)...(x-r_n)$. Assim temos que:

$$\frac{P(x)}{x-1} = (x-r_2)\cdot(x-r_3)...(x-r_n) = A(x)$$

$$A(3) = (3-r_2)\cdot(3-r_3)...(3-r_n)$$

Fazendo a divisão de P(x) por x – 1 obtemos:

$$A(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x + 1 \Rightarrow A(3) = 3^n + 3^{n-1} + ... + 3 + 1 = \frac{3^n - 1}{2}$$

b) Seja $P(x) = (x-1).(x-r_1).(x-r_2)...(x-r_n)$. Assim temos que:

$$\frac{P(x)}{x-1} = (x-r_2)\cdot(x-r_3)...(x-r_n) = A(x)$$

$$A(3) = (1-r_2)\cdot(1-r_3)...(1-r_n)$$

Fazendo a divisão de P(x) por x -1 obtemos:

$$A(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x + 1 \Rightarrow A(1) = 1^n + 1^{n-1} + ... + 1 + 1 = n$$

Questão – 11.51

Solução:

Seja m a raiz real então temos que:

$$m^3 + (-6+2i)m^2 + (10-9i)m + (-3+9i) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m^3 - 6m^2 + 10m - 3 = 0 \\ 2m^2 - 9m + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Note que $P(3) = 0$ e $P\left(\frac{3}{2}\right) \neq 0$

Observe que

$$\frac{x^3 + (-6+2i)x^2 + (10-9i)x + (-3+9i)}{x-3} = x^2 + (-3+2i)x + (1-3i) \Rightarrow \begin{cases} x = 2-i \\ x = 1-i \end{cases}$$

$P(x) = (x-3)(x-2+i)(x-1+i)$

Questão – 11.52

Solução:

$(x-\alpha)\cdot(x-\beta)\cdot(x-\gamma)+5 = k(x-r)\cdot(x-s)\cdot(x-t) \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x+(\alpha\beta\gamma+5) =$

$= k\cdot(x^3-(r+s+t)x^2+(rs+rt+st)x+(rst) \Rightarrow k = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-\alpha)\cdot(x-\beta)\cdot(x-\gamma)+5 = (x-r)\cdot(x-s)\cdot(x-t) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-\alpha)\cdot(x-\beta)\cdot(x-\gamma) = (x-r)\cdot(x-s)\cdot(x-t)-5$

Logo as raízes da equação $(x-r)\cdot(x-s)\cdot(x-t)-5$ são α, β, γ

Questão – 11.53

Solução:

Como a equação tem grau 20 ela tem que ter 20 raízes logo pode ter no máximo 20 raízes distintas. Exemplo: o polinômio P(x) = (x – 1)(x – 2)...(x – 19)(x – 20) tem grau 20 e tem 20 raízes distintas que são os números de 1 a 20.

Questão – 11.54

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Capítulo 12
Raízes Múltiplas

Capítulo 12

Questão – 12.7

Solução:

Correção no enunciado: $x^3 + 7x^2 + 16x + 12$
Seja $P(x) = x^3 + 7x^2 + 16x + 12$

Solução 1: Usando derivada
$P'(x) = 3x^2 + 14x + 16$

$P'(x) = 0 \Rightarrow x = -2$ ou $x = -\frac{8}{3}$

Note que $P(-2) = 0$ e $P\left(-\frac{8}{3}\right) \neq 0$

Logo a raiz dupla é -2.

$$\frac{x^3 + 7x^2 + 16x + 12}{(x+2)^2} = x + 3$$

Portanto as raízes são -2 e -3

Solução 2: Usando teste da raiz racional
Pelo teste da raiz racional os candidatos a raizes de P(x) são $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

Note que $P(-2) = 0$

$$\frac{x^3 + 7x^2 + 16x + 12}{x+2} = x^2 + 5x + 6 = (x+2)\cdot(x+3)$$

Solução 3: Usando as relações de Girard
Seja a raiz dupla e b raiz simples
Pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} 2a + b = -7 \\ 2ab + a^2 = 16 \Rightarrow b = -7 - 2a \Rightarrow 2a(-7 - 2a) + a^2 = 16 \\ a^2 b = -12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3a^2 + 14a + 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{8}{3} \\ a = -2 \end{cases}$$

Note que $P(-2) = 0$ e $P\left(-\frac{8}{3}\right) \neq 0$

Logo a raiz dupla é -2.

$$\frac{x^3+7x^2+16x+12}{(x+2)^2} = x+3$$

Portanto as raizes são -2 e -3

Questão – 12.8

Solução:

Seja $P(x) = x^3 - (5-2i)x^2 + (6-8i)x + 6i$

Note que $P(3) = 0$

$$\frac{x^3-(5-2i)x^2+(6-8i)x+6i}{x-3} = x^2+(-2+2i)x-2i = (x-(1-i))\cdot(x-(1-i))$$

Portanto $1-i$ é raiz dupla e 3 é raiz simples

Questão – 12.9

Solução:

Seja $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 5x + 1$

Solução 1: Usando derivada

$P'(x) = 8x^3 - 21x^2 + 18x - 5$

$P''(x) = 24x^2 - 42x + 18$

$P''(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = \frac{13}{8}$

Note que $P(1) = 0$ e $P\left(\frac{13}{8}\right) \neq 0$

Logo a raiz tripla é 1.

$$\frac{2x^4-7x^3+9x^2-5x+1}{(x-1)^3} = 2x-1$$

Portanto as raízes são 1 e $\frac{1}{2}$

Solução 2: Usando teste da raiz racional
Pelo teste da raiz racional os candidatos a raízes de P(x) são ±1

Note que P(1) = 0

$$\frac{2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 5x + 1}{(x-1)} = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$$

Seja M(x) $2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$

Note que M(1) = 0

$$\frac{2x^3 - 5x^2 + 4x - 1}{(x-1)} = 2x^2 + 3x + 1 = (2x-1)(x-1)$$

Portanto as raízes são 1 e $\frac{1}{2}$

Solução 3: Usando as relações de Girard
Seja a raiz tripla e b raiz simples
Pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} 3a + b = \frac{7}{2} \\ 3a(a+b) = \frac{9}{2} \\ a^2(3b+a) = \frac{5}{2} \\ a^3 b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow b = \frac{7}{2} - 3a \Rightarrow 3a\left(a + \left(\frac{7}{2} - 3a\right)\right) = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow 12a^2 - 21a + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ a = 1 \end{cases}$$

Note que P(1) = 0 e $P\left(\frac{3}{4}\right) \neq 0$

Logo a raiz tripla é 1.

$$\frac{2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 5x + 1}{(x-1)^3} = 2x - 1$$

Portanto as raízes são 1 e $\frac{1}{2}$

Questão – 12.10

Solução:

Seja $P(x) = x^3 + 9x^2 + 24x + k$

Solução 1: Usando derivada
$P'(x) = 3x^2 + 18x + 24$
$P'(x) = 0 \Rightarrow x = -2$ ou $x = -4$
Se $x = -2 \Rightarrow P(-2) = 0 \Rightarrow -8 + 36 - 48 + k = 0 \Rightarrow k = 20$
Se $x = -4 \Rightarrow P(-4) = 0 \Rightarrow -64 + 144 - 96 + k = 0 \Rightarrow k = 16$

Solução 2: Usando as relações de Girard
Seja a raiz dupla e b raiz simples
Pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} 2a + b = -9 \\ 2ab + a^2 = 24 \Rightarrow b = -9 - 2a \Rightarrow 2a(-9 - 2a) + a^2 = 24 \\ a^2 b = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3a^2 + 18a + 24 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = -4 \end{cases}$$

Se $a = -2 \Rightarrow P(-2) = 0 \Rightarrow -8 + 36 - 48 + k = 0 \Rightarrow k = 20$
Se $a = -4 \Rightarrow P(-4) = 0 \Rightarrow -64 + 144 - 96 + k = 0 \Rightarrow k = 16$

Questão – 12.11

Solução:

Seja a raiz tripla e b raiz simples

$$\begin{cases} 3a + b = -7 \\ 3a(a + b) = 18 \\ a^2(3b + a) = -k \\ a^3 b = 8 \end{cases} \Rightarrow b = -7 - 3a \Rightarrow 3a(a + (-7 - 3a)) = 18 \Rightarrow 6a^2 + 21a + 18 = 0$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 7a + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ b = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Substituindo $a = -2$ e $b = -1$ nas 4 equações do sistema vemos que a solução é verdadeira
$a^2(3b + a) = -k \Rightarrow k = 20$

Fazendo $a = -\frac{3}{2}$ e $b = -\frac{5}{2}$ na ultima equação do sistema temos que $a^3b = \left(-\frac{27}{8}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{135}{16}$

Logo esta solução não é valida

Portanto a única solução possível é k = 20

Questão – 12.12

Solução:

Seja $P(x) = x^4+x^3 - 3x^2 + kx + t$

$P'(x) = 4x^3+3x^2 - 6x + k$

$P''(x) = 12x^2 + 6x - 6$

$$P''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 + 6x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Agora vamos analisar os dois casos

Caso 1: – 1 é raiz tripla

Seja b a raiz simples

Usando as relações de Girard temos que:

$-3 + b = -1$

$\Rightarrow b = 2 \Rightarrow P(x) = (x+1)^3\cdot(x-2) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 \Rightarrow k = -5 \Rightarrow t = -2$

Caso 2: $\frac{1}{2}$ é raiz tripla

Seja b a raiz simples

Usando as relações de Girard temos que:

$$\frac{3}{2} + b = -1$$

$$\Rightarrow b = -\frac{5}{2} \Rightarrow P(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(x+\frac{5}{2}\right) = x^4 + x^3 - 3x^2 + \frac{7}{4}x - \frac{5}{16} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{7}{4} \\ t = \frac{5}{16} \end{cases}$$

Questão – 12.13

Solução:

Seja $P(x) = x^4 + \frac{8}{3}x^3 + 2x^2 + 8x + k$

$P'(x) = 4x^3 + 8x^2 + 4x + 8$

Note que $P'(-2) = 8$

$$\frac{4x^3 + 8x^2 + 4x + 8}{x + 2} = 4x^2 + 4 = 4(x - i)(x + i)$$

Portanto a única raiz real e negativa é -2

Logo $P(-2) = (-2)^4 + \frac{8}{3}(-2)^3 + 2(-2)^2 + 8(-2) + k = 0 \Rightarrow k = \frac{40}{3}$

Questão – 12.14

Solução:

Para que 2 seja raiz dupla é preciso que o polinômio seja divisível por $(x - 2)^2$

$$\frac{x^3 + (k - 4)x^2 + (4 - 4k)x + 4k}{(x - 2)^2} = x + k$$

Para que 2 seja raiz dupla é preciso que $x + k \neq x - 2 \Rightarrow k \neq -2$

Capítulo 13
Raízes Imaginarias

Capítulo 13

Questão – 13.10

Solução:

a) Como 2 – 6i é raiz então 2 + 6i também é raiz. Assim temos que o polinômio possui no mínimo 4 raízes logo possui no mínimo grau 4.

b) Como os coeficientes são complexos não é obrigatório que o 2 + 6i seja raiz logo o polinômio tem no mínimo 3 raízes e portanto ele tem no mínimo grau 3.

Questão – 13.11

Solução:

Como 7 + 5i é raiz de multiplicidade 4 então 7 – 5i também é raiz de multiplicidade 4. Portanto o polinômio grau no mínimo 4 + 4 + 2 + 3 = 13.

Questão – 13.12

Solução:

a) Verdadeiro, isto está disto na pagina 205 do livro **NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7**

b) Verdadeiro, isto está disto na pagina 205 do livro **NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7**

c) Falso, note que $P(x) = x^2 + 1$ possui só raízes complexas

d) Verdadeiro, note que $P(x) = x^2 + 1$ possui só raízes complexas

e) Falso, se o grau é impar o polinômio tem que ter pelo menos uma raiz real

f) Verdadeiro, se o grau é par então o numero de raízes também é par. Como a quantidade de raízes complexas é sempre para então o numero de raízes reais também é par.

Questão – 13.13

Solução:

a) Verdadeiro, pois como o grau é impar o numero de raízes reais tem que ser impar portanto tem que ser no mínimo 3.

b) Falso, Como 2 + 3i é raiz então 2 – 3i também é raiz portanto P(x) só pode ter no máximo 15 raízes reais.

c) Falso, pois a quantidade de raízes imaginarias tem que ser par

d) Verdadeiro, Verdadeiro, pois como o grau é impar o numero de raízes reais tem que ser impar portanto tem que ser no mínimo 3.Assim teremos no máximo 1 raízes imaginarias.

Questão – 13.14

Solução:

Como i é raiz então – i também é raiz
Como 2 - i é raiz então 2 + i também é raiz
Logo $P(x) | (x - i).(x + i).(x - (2 + i)).(x - (2 - i)).(x - 3)$

Assim temos que: $P(x) | x^5 - 7x^4 + 18x^3 - 22x^2 + 17x - 15$
Como o termo independente é 30 então
$P(x) = -2(x^5 - 7x^4 + 18x^3 - 22x^2 + 17x - 15) = -2x^5 + 14x^4 - 36x^3 + 44x^2 - 34x + 30$

Questão – 13.15

Solução:

2i é raiz dupla logo – 2i também é raiz dupla logo o polinômio é divisível por $(x^2 + 4)^2$
$1 + \sqrt{5}i$ é raiz simples logo o polinômio é divisível por $(x^2 - 2x + 6)$
Zero é raiz tripla logo o polinômio é divisível por x^3
Logo o polinômio é divisível por $x^3.(x^2 - 2x + 6).(x^2 + 4)^2 = x^9 - 2x^8 + 14x^7 - 16x^6 + 64x^5 - 32x^4 + 96x^3$
Portanto o polinômio tem grau no mínimo 9
Como o coeficiente de x^5 é 32 precisamos dividir tudo por 2

Logo $A(x) = \frac{1}{2}x^9 - x^8 + 7x^7 - 8x^6 + 32x^5 - 16x^4 + 48x^3$

Questão – 13.16

Solução:

Como 3 + i é raiz então 3 – i também é raiz
Sejam a e b as outras duas raízes logo usando as relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} a+b+(3+i)+(3-i)=9 \\ a\cdot b\cdot(3-i)\cdot(3+i)=-40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ ab=-4 \end{cases} \Rightarrow a=4 \Rightarrow b=-1$$

Questão – 13.17

Solução:

$$x^6-3x^5-18x^3+12x^2=30x^3-18x^4-20x^2 \Rightarrow x^6-3x^5+18x^4-48x^3+32x^2=0$$

$$x^2\cdot(x^4-3x^3+18x^2-48x+32)=0$$

Seja $P(x) = x^4-3x^3+18x^2-48x+32$
Note que P(1) = P(2) = 0 logo P(x) é divisível por (x – 1).(x – 2)

$$\frac{x^4-3x^3+18x^2-48x+32}{(x-1)\cdot(x-2)}=(x^2+16)=(x-4i)(x+4i)$$

Portanto as raízes são {0, 1, 2, 4i, –4i}

Questão – 13.18

Solução:

Como i é raiz então – i também é raiz dupla
Sejam a e b as outras duas raízes logo usando as relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} a+b+(2i)+(-2i)=1 \\ a\cdot b\cdot(i^2)\cdot(-i)^2=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ ab=-1 \end{cases} \Rightarrow a=2 \Rightarrow b=-1$$

Portanto as raízes são {2, –1, i, –i}

Questão – 13.19

Solução:

Seja $P(x) = x^5-4x^4-3x^3-6x^2+ax+b$

Como 2i é raiz então P(2i) = 0 logo:

$(2i)^5 - 4\cdot(2i)^4 - 3(2i)^3 - 6(2i)^2 + a(2i) + b = 0 \Rightarrow (56 + 2a)i + (b - 40) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 56 + 2a = 0 \\ b - 40 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -28 \\ b = 40 \end{cases}$$

Como 2i é raiz então –2i também é raiz

Sejam m e n as outras duas raízes logo usando as relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} m + n + 1 + (2i) + (-2i) = 4 \\ m \cdot n \cdot 1 \cdot (2i)^2 \cdot (-2i)^2 = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + n = 3 \\ m \cdot n = -10 \end{cases} \Rightarrow m = 5 \Rightarrow n = -2$$

Portanto as raízes são {1, –2, 5, 2i, –2i}

Questão – 13.20

Solução:

Seja $P(x) = x^7 - 2x^6 + 7x^5 - 14x^4 + 8x^3 - 16x^2 + ax + b$

Como 2i é raiz então P(2i) = 0 logo:

$x^7 - 2x^6 + 7x^5 - 14x^4 + 8x^3 - 16x^2 + ax + b = -128i + 128 + 224i - 224 - 64i + 64 + 2ai + b$

$= (-32 + b) + (32 + 2a)i = 0 \Rightarrow a = -16 \Rightarrow b = 32$

Sejam m e n as outras duas raízes logo usando as relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} m + n + 1 + 2 \cdot (2i) + 2 \cdot (-2i) = 2 \\ m \cdot n \cdot 1 \cdot (2i)^2 \cdot (-2i)^2 = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + n = 1 \\ m \cdot n = -2 \end{cases} \Rightarrow m = 2 \Rightarrow n = -1$$

Portanto as raízes são {1, –2, –1, 2i, –2i}

Questão – 13.21

Solução:

Não. Note que o polinômio P(x) = x – (5 + 7i) tem 5 + 7i como raiz, mas não tem 5 – 7i como raiz.

Questão – 13.22

Solução:

Pelo GABARITO DO LIVRO **NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7** as raízes devem ser $-3, \left(-\frac{6}{5}+\frac{8}{5}i\right), \left(-\frac{6}{5}+\frac{8}{5}i\right)$

Sendo assim pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} (-3)+\left(-\frac{6}{5}+\frac{8}{5}i\right)+\left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i\right)=-\frac{27}{5} \\ (-3)\left(-\frac{6}{5}+\frac{8}{5}i\right)+(-3)\left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i\right)+\left(-\frac{6}{5}+\frac{8}{5}i\right)\cdot\left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i\right)=\frac{56}{5} \\ (-3)\left(-\frac{6}{5}+\frac{8}{5}i\right)\left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i\right)=-12 \end{cases}$$

Portanto devemos ter 56x e não 46x

Correção no enunciado: $5x^3+27x^2+56x+m$

Como o polinômio tem grau impar ele tem pelo menos uma raiz real.

Como foi dito que ele tem uma raiz imaginaria então o conjugado dessa raiz imaginaria também é raiz.

Sejam c, a+ bi e a - bi as raízes. Como o modulo da raiz imaginaria é 2 temos que $a^2 + b^2 = 4$. Usando as relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} 2a+c=-\frac{27}{5}(I) \\ 2ac+a^2+b^2=\frac{56}{5}(II) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+c=-\frac{27}{5} \\ 2ac+4=\frac{56}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+c=-\frac{27}{5} \\ 2ac=\frac{36}{5} \Rightarrow a=\frac{18}{5c} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{36}{5c}+c=-\frac{27}{5} \Rightarrow 5c^2+27c+36=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c=-3 \Rightarrow a=-\frac{6}{5} \Rightarrow b=\pm\frac{8}{5} \Rightarrow -\frac{m}{5}=(-3)\left(-\frac{6}{5}+\frac{8}{5}i\right)\left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i\right)=-12 \Rightarrow m=60 \\ c=-\frac{12}{5} \Rightarrow a=-\frac{3}{2} \Rightarrow b=\pm\frac{\sqrt{7}}{2} \Rightarrow -\frac{m}{5}=\left(-\frac{12}{5}\right)\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i\right)\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i\right)=-\frac{48}{5} \Rightarrow m=48 \end{cases}$$

Portanto m = 48 ou m = 60 e as raízes são

$$\left\{-3,-\frac{6}{5}+\frac{8}{5}i,-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i\right\} ou \left\{-\frac{12}{5},-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i,-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i\right\}$$

Questão – 13.23

Solução:

Como o polinômio tem grau impar ele tem pelo menos uma raiz real.
Como foi dito que ele tem uma raiz imaginaria então o conjugado dessa raiz imaginaria também é raiz.

Sejam c, a+ bi e a – bi as raízes. Como o modulo da raiz imaginaria é 2 temos que $a^2 + b^2 = 4$. Usando as relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} 2a+c=-\frac{27}{5}\,(I) \\ 2ac+a^2+b^2=0\,(II) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+c=-\frac{27}{5} \\ 2ac+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+c=-\frac{27}{5} \\ 2ac=-4 \Rightarrow a=-\frac{2}{c} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{c}+c=-\frac{27}{5} \Rightarrow 5c^2+27c-20=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c=-3 \Rightarrow a=-\frac{6}{5} \Rightarrow b=\pm\frac{8}{5} \Rightarrow -\frac{m}{5}=(-3)\left(-\frac{6}{5}+\frac{8}{5}i\right)\left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i\right)=-12 \Rightarrow m=60 \\ c=-\frac{12}{5} \Rightarrow a=-\frac{3}{2} \Rightarrow b=\pm\frac{\sqrt{7}}{2} \Rightarrow -\frac{m}{5}=\left(-\frac{12}{5}\right)\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i\right)\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i\right)=-\frac{48}{5} \Rightarrow m=4. \end{cases}$$

Questão – 13.24

Solução:

Como $1+\sqrt{2}i$ é raiz então $1-\sqrt{2}i$ também é raiz e portanto $2x^5+9x^4+4x^3+54x+27$ é divisível por x^2-2x+3.

$$\frac{2x^5+9x^4+4x^3+54x+27}{x^2-2x+3}=2x^3+13x^2+24x+9$$

Seja $P(x)=2x^3+13x^2+24x+9$

Note que $P(-3)=0$

$$\frac{2x^3+13x^2+24x+9}{x+3}=2x^2+7x+3=2\cdot(x+3)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

Portanto as raízes são $\{1+\sqrt{2}i,\ 1-\sqrt{2}i,\ -3,\ -\frac{1}{2}\}$

Questão – 13.25

Solução:

Seja $P(x) = x^8 - 6x^7 + 14x^6 - 22x^5 + 25x^4 + 8x^3 - 60x^2$

Note que zero é raiz dupla. Como 2 + i é raiz então 2 – i também raiz

Seja $P(x) = \dfrac{x^8 - 6x^7 + 14x^6 - 22x^5 + 25x^4 + 8x^3 - 60x^2}{x^2(x^2 - 4x + 5)} = x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x - 12$

Note que – 1 é raiz de
$x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x - 12$

Logo
$x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x - 12$

É divisível por x + 1 e daí
$$\frac{x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x - 12}{x + 1} = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$$

Note que 3 é raiz de
$x^3 - 3x^2 + 4x - 12$

Logo
$$\frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}{x - 3} = x^2 + 4 = (x - 2i)(x + 2i)$$

Portanto as raízes são {0, 2 – i, 2 + i, –1, 3, 2i, –2i}

Capítulo 14
Relações de Girard

Capítulo 14

Questão – 14.27

Solução:

a) Sejam a, b e c as raízes do polinômio
Pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} a+b+c=6 \\ ab+ac+bc=12+i \\ abc=9+3i \end{cases}$$

Como uma raiz é a soma das outras duas temos que a = b + c

$$\begin{cases} a+b+c=6 \\ ab+ac+bc=12+i \\ abc=9+3i \\ a=b+c \end{cases} \Rightarrow 2a=6 \Rightarrow a=3$$

$$\frac{x^3-6x^2+(12+i)x-(9+3i)}{x-3}=x^2-3x+(3+i) \Rightarrow \begin{cases} x=2-i \\ x=1+i \end{cases}$$

Portanto as raízes são {1 + i, 2 – i e 3}

b) Sejam a, b e c as raízes do polinômio
Pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} a+b+c=\dfrac{2}{3} \\ ab+ac+bc=-4 \\ abc=-\dfrac{8}{3} \end{cases}$$

Como uma raiz é o triplo da outra temos que b = 3a

$$\begin{cases} a+b+c=\frac{2}{3} \\ ab+ac+bc=-4 \\ abc=-\frac{8}{3} \\ b=3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+c=\frac{2}{3} \Rightarrow c=\frac{2}{3}-4a \\ 3a^2+4ac=-4 \\ 3a^2c=-\frac{8}{3} \Rightarrow \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3a^2+\frac{8}{3}a-16a^2=-4 \Rightarrow -39a^2+8a+12$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=\frac{-8-44}{-78}=\frac{2}{3} \Rightarrow P\left(\frac{2}{3}\right)=0 \\ a=\frac{-8+44}{-78}=-\frac{18}{39} \Rightarrow P\left(-\frac{18}{39}\right)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{2}{3} \Rightarrow b=2 \Rightarrow c=-2$$

Portanto as raízes são {–2, 2, 2\3}

Sejam a, b e c as raízes do polinômio
Pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} a+b+c=4 \\ ab+ac+bc=-3 \\ abc=-18 \end{cases}$$

Como temos uma raiz dupla então temos que a = c logo:

$$\begin{cases} 2a+b=4 \\ a^2+2ab=-3 \\ a^2b=-18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=4-2a \\ a^2+2a(4-2a)=-3 \Rightarrow \\ a^2(4-2a)=-18 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3a^2+8a+3=0 \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=-\frac{1}{3} \end{cases} \\ -2a^3+4a^2+18=0 \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=-\frac{1+\sqrt{11}i}{2} \\ a=-\frac{1-\sqrt{11}i}{2} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow a=3 \Rightarrow b=-2$$

Portanto as raízes são {3 e – 2}

d) Como 5 + 2i é raiz então 5 – 2i também é raiz
Pelas relações de Girard temos que:
$5 + 2i + 5 - 2i + c = 14 \Rightarrow c = 4$

Portanto as raízes são {5 + 2i, 5 – 2i e 4}

e) Como 2i é raiz dupla então – 2i também é raiz dupla
Pelas relações de Girard temos que:
$2i + 2i - 2i - 2i + r = -\frac{2}{3} \Rightarrow r = -\frac{2}{3}$

Portanto as raízes são
$\left\{-\frac{2}{3}, 2i, -2i\right\}$

f) Sejam a, b e c as raízes do polinômio
Pelas relações de Girard temos que:
$$\begin{cases} a + b + c = -3 \\ ab + ac + bc = -16 \\ abc = 48 \end{cases}$$

Como há duas raízes simétricas temos que a + b = 0
$$\begin{cases} c = -3 \\ ab + c(a + b) = -16 \\ abc = 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ ab = -16 \end{cases} \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = -4$$

Portanto as raízes são {3, 4, –4}

g) Sejam a, b e c as raízes do polinômio
Pelas relações de Girard temos que:
$$\begin{cases} a + b + c = \frac{23}{6} \\ ab + ac + bc = \frac{16}{6} \\ abc = \frac{3}{6} \end{cases}$$

Como há duas raízes reciprocas temos que ab = 1

$$\begin{cases} a+b+c=\dfrac{23}{6} \\ ab+ac+bc=\dfrac{16}{6} \\ c=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{10}{3} \\ ab=1 \end{cases} \Rightarrow a=3 \Rightarrow b=\frac{1}{3}$$

Portanto as raízes são

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3\right\}$$

h) Sejam a, b e c as raízes do polinômio
Pelas relações de Girard e pelo enunciado temos que:

$$\begin{cases} a+b+c=\dfrac{5}{2} \\ ab+ac+bc=-1 \\ abc=-\dfrac{5}{2} \\ a+b=\dfrac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow c=-1 \Rightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{7}{2} \\ ab=\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow a=1 \Rightarrow b=\frac{5}{2}$$

Portanto as raízes são {–1, 1, 5\2}

i) Sejam a, b e c as raízes do polinômio
Pelas relações de Girard e pelo enunciado temos que:

$$\begin{cases} a+b+c=-1 \\ ab+ac+bc=-14 \\ abc=24 \\ a-b=6 \end{cases} \Rightarrow b=a-6 \Rightarrow \begin{cases} 2a+c=5 \\ a^2-6a+2ac-6c=-14 \\ a^2c-6ac=24 \end{cases} \Rightarrow c=5-2a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a(a-6)+a(5-2a)+(a-6)(5-2a)=-14 \\ a(a-6)(5-2a)=24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3a^2 + 16a - 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{4}{3} \\ a = 4 \end{cases} \\ a(a-6)(5-2a) = 24 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = \dfrac{-9+\sqrt{129}}{-4} \\ a = \dfrac{-9-\sqrt{129}}{-4} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow c = -3$$

Portanto as raízes são {- 3,- 2, 4}

j) Sejam a e b as raízes do polinômio
Pelas relações de Girard e pelo enunciado temos que:

$$\begin{cases} 3a + b = -\dfrac{25}{2} \\ 3a^2 + 3ab = 54 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \Rightarrow b = -\dfrac{1}{2} \\ a = -\dfrac{9}{4} \Rightarrow b = -\dfrac{23}{4} \end{cases}$$

$$P(-4) = P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$P\left(-\frac{9}{4}\right) \neq 0, P\left(-\frac{23}{4}\right) \neq 0$$

Portanto as raizes são {–4, –1\2}

k) Sejam a, b e c as raízes do polinômio
Pelas relações de Girard e pelo enunciado temos que:

$$\begin{cases} a + b + c = \dfrac{19}{2} \\ ab + ac + bc = \dfrac{45}{2} \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3 \Rightarrow \\ abc = 9 \\ a = bc \end{cases} \begin{cases} a = 3 \Rightarrow \begin{cases} b + c = \dfrac{13}{2} \\ bc = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 6 \Rightarrow c = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{1}{2} \Rightarrow c = 6 \end{cases} \\ a = -3 \Rightarrow 2(-3)^3 - 19(-3)^2 + 45(-3) - 18 < 0 \end{cases}$$

Logo – 3 não é raiz do polinômio. Portanto as raízes são {3,6, 1\2}

l)

$$\begin{cases} a+b+c=12 \\ ab+ac+bc=20 \\ abc=-96 \\ c=\dfrac{4}{3}a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{7a}{3}+b=12 \\ 4a^2+7ab=60 \Rightarrow b=12-\dfrac{7a}{3} \Rightarrow 4a^2+7a\cdot\left(12-\dfrac{7a}{3}\right)=60 \\ a^2b=-72 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -37a^2+252a-180=0 \Rightarrow \begin{cases} a=6 \Rightarrow \begin{cases} c=8 \\ b=-2 \end{cases} \\ a=\dfrac{30}{37} \Rightarrow \left(\dfrac{30}{37}\right)^3-12\cdot\left(\dfrac{30}{37}\right)^2+20\cdot\left(\dfrac{30}{37}\right)+96\neq 0 \end{cases}$$

Portanto as raizes são {– 2, 6, 8}

Questão – 14.28

Solução:

Correção no ENUNCIADO: Uma das raizes da equação $2x^3-9x^2+x+k$ é igual a metade da soma das outras duas

a) Sejam a , b e c as raizes do polinômio. Digamos que a é a soma das outras duas raizes então a = b + c. Pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} a+b+c=\dfrac{9}{2} \\ ab+ac+bc=\dfrac{1}{2} \\ abc=\dfrac{k}{2} \\ a=\dfrac{b+c}{2} \end{cases} \Rightarrow 3a=\frac{9}{2} \Rightarrow a=\frac{3}{2} \Rightarrow 2\left(\frac{3}{2}\right)^3-9\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)+k=0$$

$$\Rightarrow \frac{27}{4}-\frac{81}{4}+\frac{6}{4}+\frac{4k}{4}=0 \Rightarrow k=12$$

b) O polinômio é divisível por 2x – 3

$$\frac{2x^3-9x^2+x+12}{2x-3}=x^2-3x+4=(x-4)(x+1)$$

Portanto as raízes são 4, –1 e $\frac{3}{2}$.

Questão – 14.29

Solução:

$(3x-1)(x-2)(x-(1+i))) = 3x^3 - (10+3i)x^2 + (9+7i)x - (2+2i)$

Questão – 14.30

Solução:

$(x-5)^2.(x-(2-i)) = x^3 - (12-i)x^2 + (45-10i)x - (50-25i)$

Questão – 14.31

Solução:

$(x-3)^2.(x-2)(x+1) = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18$

Questão – 14.32

Solução:

Seja t e 6t as raízes do polinômio. Pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} 6t + t = \frac{7}{3} \\ (6t)t = \frac{k+2}{3} \end{cases} \Rightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{k+2}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow k = 0$$

Questão – 14.33

Solução:

Para que as raízes sejam reciprocas é preciso que o produto das raízes seja 1. Daí temos que:

$$\frac{6k+2}{5} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Questão – 14.34

Solução:

Pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} a+b=-\dfrac{4}{3} \\ ab=\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

a) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{-\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}}=-\dfrac{4}{5}$

b) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2-2\cdot\left(\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{16}{9}-\dfrac{10}{3}=-\dfrac{14}{9}$

c) $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{a^2+b^2}{(ab)^2}=\dfrac{-\frac{14}{9}}{\left(\frac{5}{3}\right)^2}=-\dfrac{14}{25}$

d) $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2(ab)^2=\left(-\dfrac{14}{9}\right)^2-2\cdot\left(\dfrac{5}{3}\right)^2=\dfrac{196}{81}-\dfrac{50}{9}=-\dfrac{254}{81}$

e) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=\left(-\dfrac{4}{3}\right)^3-3\cdot\left(\dfrac{5}{3}\right)\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{64}{27}+\dfrac{20}{3}=\dfrac{116}{27}$

Questão – 14.35

Solução:

Sejam a e b as raízes do polinômio

Pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} a+b=\dfrac{-5+i}{3} \\ ab=\dfrac{2-3i}{2} \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=\left(\dfrac{-5+i}{3}\right)^2-2\cdot\left(\dfrac{2-3i}{3}\right)=$$

$$=\dfrac{25-10i-1-12+18i}{9}=\dfrac{12+8i}{9}$$

Questão – 14.36

Solução:

Sejam a e b as raízes do polinômio
Pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} a+b=\dfrac{5}{2} \\ ab=\dfrac{k}{2} \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=\left(\frac{5}{2}\right)^2-2\cdot\left(\frac{k}{2}\right)=\frac{7}{4}\Rightarrow k=\frac{9}{2}$$

Questão – 14.37

Solução:

Pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} a+bc+c=\dfrac{3}{4} \\ ab+ac+bc=\dfrac{1}{2} \\ abc=-2 \end{cases}$$

a) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{ab+ac+bc}{abc}=\dfrac{\frac{1}{2}}{-2}=-\dfrac{1}{4}$

b) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)=\left(\frac{3}{4}\right)^2-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{16}$

c) $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=(ab+ac+bc)^2-2(abc)(a+b+c)=$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot(-2)\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}+3=\frac{13}{4}$

d) $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{ac}+\dfrac{1}{bc}=\dfrac{a+b+c}{abc}=\dfrac{\frac{3}{4}}{-2}=-\dfrac{3}{8}$

e) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{(abc)^2}=\frac{\frac{13}{4}}{4}=\frac{13}{16}$

f) $a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)=$

$=\left(-\frac{7}{16}\right)^2-2\cdot\left(\frac{13}{4}\right)=\frac{49}{256}-\frac{1664}{256}=-\frac{1615}{256}$

g) $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+ac+bc)+3abc=$

$=\left(\frac{3}{4}\right)^3-3\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+3(-2)=-\frac{429}{64}$

h) $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}=\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}=\frac{-\frac{7}{16}}{-2}=\frac{7}{32}$

Questão – 14.38

Solução:

Pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_9=-\frac{1}{4} \\ x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+\ldots+x_8\cdot x_9=\frac{3+i}{4} \end{cases}$$

$\Rightarrow (x_1)^2+(x_2)^2+\ldots+(x_9)^2=(x_1+x_2+\ldots+x_9)^2-2(x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+\ldots+x_8\cdot x_9)$

$=\left(-\frac{1}{4}\right)^2-2\cdot\left(\frac{3+i}{4}\right)=\frac{-23-8i}{16}$

Questão – 14.39

Solução:

a) Pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} a+b+c=-\dfrac{3}{2} \\ ab+ac+bc=2 \\ abc=-3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=ab+ac+bc=2 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=(ab)(ac)+(ab)(bc)+(ac)(bc)=abc(a+b+c)=\dfrac{9}{2} \\ x_1x_2x_3=(ab)(ac)(bc)=(abc)^2=9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(x)=x^3-2x^2+\frac{9}{2}x-9$$

b) Pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} a+b+c=-\dfrac{3}{2} \\ ab+ac+bc=2 \\ abc=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=\left(a-\dfrac{1}{bc}\right)+\left(b-\dfrac{1}{ac}\right)+\left(c-\dfrac{1}{ab}\right)=(a+b+c)-\left(\dfrac{a+b+c}{abc}\right)=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}=-2 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\left(a-\dfrac{1}{bc}\right)\left(b-\dfrac{1}{ac}\right)+\left(a-\dfrac{1}{bc}\right)\left(c-\dfrac{1}{ab}\right)+\left(b-\dfrac{1}{ac}\right)\left(c-\dfrac{1}{ab}\right) \\ x_1x_2x_3=\left(a-\dfrac{1}{bc}\right)\left(b-\dfrac{1}{ac}\right)\left(c-\dfrac{1}{ab}\right)=-3+abc+\dfrac{3}{abc}-\dfrac{1}{(abc)^2}=-\dfrac{64}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-2 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=(ab+ac+bc)-2\left(\dfrac{ab+ac+bc}{abc}\right)-2\left(\dfrac{ab+ac+bc}{(abc)^2}\right)=2+\dfrac{4}{3}+\dfrac{2}{9}=\dfrac{32}{9} \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{64}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(x)=x^3+2x^2-\frac{32}{9}x+\frac{64}{9}$$

c)

$$\begin{cases} a+b+c=-\dfrac{3}{2} \\ ab+ac+bc=2 \\ abc=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{ab+ac+bc}{abc}=-\dfrac{2}{3} \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ac}=\dfrac{a+b+c}{abc}=\dfrac{1}{2} \\ x_1x_2x_3=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{abc}=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(x)=x^3+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$$

Questão – 14.40

Solução:

Pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} a+b=-2 \\ ab=3 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(-2)^2-2\cdot(3)=-2$$

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=(-2)^3-3\cdot(3)(-2)=1$$

Portanto o polinômio é $x^2-8x-20$

Questão – 14.41

Solução:

Seja $P(x)=x^3+7x+13$

Note que a, b e c são as raízes do polinômio P(x) logo pelas relações de Girard:
$a+b+c=0$

Questão – 14.42

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 14.43

Solução:

Note que P(– 2) = 40 – 8 + 8 – 40 = 0. Logo – 2 é raiz do polinômio

$$\frac{5x^3 - 2x^2 - 4x + 40}{x + 2} = 5x^2 - 12x + 20$$

$$5x^2 - 12x + 20 = 0 \Rightarrow \Delta = -256 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 16i \Rightarrow x = \frac{12 \pm 16i}{10} = \frac{6 \pm 8i}{5}$$

Questão – 14.44

Solução:

a) Se as raízes estão em P.A. então são da forma (a – r, a, a + r)
Pelas relações de Girard temos que:
a – r + a + a + r = 3 $\Rightarrow$ a = 1

Como 1 é raiz as outras duas raízes são 1 – r e 1 + r
Pelas relações de Girard temos que:
(1 – r)(1 + r) = –15 $\Rightarrow$ r = ± 4

Logo as raízes são (–3, 1, 5)

b) Se as raízes estão em P.G. então são da forma $(\frac{a}{q}, a, aq)$

Pelas relações de Girard temos que:

$\frac{a}{q} . a . aq = 8 \Rightarrow a = 2$

Como 2 é raiz as outras duas raízes são $\frac{2}{q}$ e 2q

Pelas relações de Girard temos que:

$$\frac{2}{q} + 2q = \frac{17}{2} \Rightarrow 4q^2 - 17q + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} q = 4 \\ q = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Logo as raízes são $\left(\frac{1}{2}, 2, 8\right)$

c) Se as raízes estão em P.A. então são da forma $(a - r, a, a + r)$
Pelas relações de Girard temos que:
$a - r + a + a + r = 9 \Rightarrow a = 3$

Como 3 é raiz as outras duas raízes são $3 - r$ e $3 + r$
Pelas relações de Girard temos que:
$(3 - r)(3 + r) = -7 \Rightarrow r = \pm 4$

Logo as raízes são $(-1, 3, 7)$

d) Se as raízes estão em P.G. então são da forma $(\frac{a}{q}, a, aq)$

Pelas relações de Girard temos que:

$\frac{a}{q} . a . aq = -8 \Rightarrow a = -2$

Como -2 é raiz as outras duas raízes são $-\frac{2}{q}$ e $-2q$

Pelas relações de Girard temos que:

$$-\frac{2}{q} - 2q = 5 \Rightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} q = 2 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Logo as raízes são $(-4, -2, -1)$

e) Este problema é análogo ao problema 14.16
Sejam a, b e c as raízes do polinômio

Pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} a + b + c = \frac{4}{3} (I) \\ ab + ac + bc = -16 (II) \\ abc = -\frac{64}{3} (III) \end{cases}$$

Como a, b e c formam uma progressão harmônica então temos que:
$ab + bc = 2ac$ (IV)

Substituindo (IV) em (II) temos que:

$$3ac = -16 \Rightarrow ac = -\frac{16}{3} \Rightarrow \begin{cases} ac = -\frac{16}{3} \\ abc = -\frac{64}{3} \end{cases} \Rightarrow b = 4 \Rightarrow \begin{cases} ac = -\frac{16}{3} \\ a + c = -\frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow a = -4 \Rightarrow c = \frac{4}{3}$$

Logo as raízes são $\left\{-4, 4, \frac{4}{3}\right\}$

f) Se as raízes estão em P.A. então são da forma $(a - 3r, a - r, a + r, a + 3r)$
Pelas relações de Girard temos que:
$a - 3r + a - r + a + r + a + 3r = 12 \Rightarrow a = 3$

Pelas relações de Girard temos que:
$(3 - 3r).(3 - r).(3 + r).(3 + 3r) = -135 \Rightarrow r^4 - 10r^2 + 24 = 0$

$$\Rightarrow (r^2 - 6)(r^2 - 4) = 0 \begin{cases} r = \pm 2 \\ r = \pm\sqrt{6} \end{cases}$$

Se $r = \pm 2$ as raízes são $(-3, 1, 5, 9)$

Se $r = \pm \sqrt{6}$ as raízes são $(3 - 3\sqrt{6}, 3 - \sqrt{6}, 3 + \sqrt{6}, 3 + \sqrt{6})$

Substituindo no polinômio vemos que $P(-3) = P(1) = P(5) = P(9) = 0$, logo as raízes são $(-3, 1, 5, 9)$.

Questão – 14.45

Solução:

Se as raízes estão em P.A. então são da forma $(a - r, a, a + r)$
Pelas relações de Girard temos que:
$a - r + a + a + r = -6 \Rightarrow a = -2$

Como -2 é raiz temos que:
$(-2)^3 + 6.(-2)^2 - 2k - 24 = 0 \Rightarrow k = -4$

Questão – 14.46

Solução:

Sejam a, b, c e d as raízes do polinômio. Pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} a+b+c+d=6 \\ abc+abd+acd+bcd=-24 \end{cases}$$

Podemos sem perda de generalidade que a e b são as raízes simétricas são a e b e daí temos que: a + b = 0

$$\begin{cases} a+b+c+d=6 \\ abc+abd+acd+bcd=-24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c+d=6 \\ ab(c+d)+cd(a+b)=-24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 6ab=-24 \Rightarrow ab=-4 \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ ab=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \Rightarrow b=-2 \\ a=-2 \Rightarrow b=2 \end{cases}$$

Portanto o polinômio é divisível por $x^2 - 4$

$$\frac{x^4-6x^3+6x^2+24x-40}{x^2-4} = x^2-6x+10$$

$$x^2-6x+10=0 \Rightarrow \Delta=-4 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{6+2i}{2}=3+i \\ x=\dfrac{6-2i}{2}=3-i \end{cases}$$

Portanto as raízes são {2, – 2, 3 + i, 3 – i}

Questão – 14.47

Solução:

Sejam a, b, c e d as raízes do polinômio. Pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} a+b+c+d=-\dfrac{2}{3} \\ abc+abd+acd+bcd=\dfrac{18}{3} \\ abcd=3 \end{cases}$$

Podemos sem perda de generalidade que a e b são as raízes simétricas são a e b e daí temos que: a.b = 1

$$\begin{cases} a+b+c+d=-\dfrac{2}{3} \\ abc+abd+acd+bcd=\dfrac{18}{3} \\ abcd=3 \Rightarrow cd=3 \end{cases}$$

$$ab(c+d)+cd(a+b)=\frac{18}{3} \Rightarrow c+d+a+b+2(a+b)=\frac{18}{3} \Rightarrow a+b=\frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{10}{3} \\ ab=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \Rightarrow b=3 \\ a=3 \Rightarrow b=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\frac{3x^4+2x^3-28x^2-18x+9}{3x^2-10x+3}=x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$$

Portanto as raízes são $\{-1, -3, 3, \frac{1}{3}\}$

Questão – 14.48

Solução:

Sejam a, b, c e d as raízes do polinômio. Pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} a+b+c+d=\dfrac{13}{2} \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=2 \\ abc+abd+acd+bcd=-7 \\ abcd=-3 \end{cases}$$

Podemos sem perda de generalidade que a e b são as raízes simétricas são a e b e daí temos que: a.b = 3

$$\begin{cases} a+b+c+d=\dfrac{13}{2} \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=2 \\ abc+abd+acd+bcd=-\dfrac{13}{2} \\ abcd=-3 \Rightarrow cd=-1 \end{cases}$$

$$ab(c+d)+cd(a+b)=-\frac{13}{2} \Rightarrow 3c+3d+-a-b=-\frac{13}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3c+3d+-a-b=-\frac{13}{2} \\ a+b+c+d=\frac{13}{2} \end{cases} \Rightarrow c+d=0$$

$$\begin{cases} c+d=\frac{10}{3} \Rightarrow c=1 \Rightarrow d=-1 \\ cd=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=\frac{13}{2} \Rightarrow a=\frac{1}{2} \Rightarrow b=6 \\ ab=3 \end{cases}$$

Portanto as raízes são $\{-1, 1, 6, \frac{1}{2}\}$

Questão – 14.49

Solução:

a) Sejam a, b, c e d as raízes do polinômio. Pelas relações de Girard temo que:

$$\begin{cases} a+b+c+d=-\frac{k}{2} \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=\frac{m}{2} \\ abc+abd+acd+bcd=-7 \\ abcd=-4 \end{cases}$$

Podemos sem perda de generalidade que a e b são as raízes simétricas são a e b e daí temos que: a + b = 1 e cd = 2

$$\begin{cases} a+b+c+d=-\frac{k}{2} \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=\frac{m}{2} \\ abc+abd+acd+bcd=-7 \\ abcd=-4 \Rightarrow ab=-2 \end{cases}$$

$$ab(c+d)+cd(a+b)=-7 \Rightarrow (-2)(c+d)+2=-7 \Rightarrow \begin{cases} c+d=\dfrac{9}{2} \Rightarrow c=4 \Rightarrow d=\dfrac{1}{2} \\ cd=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ ab=-2 \end{cases} \Rightarrow a=2 \Rightarrow b=-1$$

Portanto as raízes são $\{-1, 2, 4, \frac{1}{2}\}$

b) $$\begin{cases} a+b+c+d=-\dfrac{k}{2} \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=\dfrac{m}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-1+4+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{k}{2} \Rightarrow k=-11 \\ -2+6+1-4-\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{m}{2} \Rightarrow m=9 \end{cases}$$

Questão – 14.50

Solução:

Sejam a, b, c as raízes do polinômio e a a hipotenusa.
Pelas relações de Girard e pelo teorema de Pitágoras temos que:

$$\begin{cases} a+b+c=7+\sqrt{7} \\ ab+ac+bc=12+7\sqrt{7} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$$

$$(a+b+c)^2=(a^2+b^2+c^2)+2(ab+ac+bc) \Rightarrow (7+\sqrt{7})^2=2a^2+2\cdot(12+7\sqrt{7})$$

$$\Rightarrow 2a^2=32 \Rightarrow a=4 \Rightarrow b+c=3+\sqrt{7}$$

$$ab+ac+bc=12+7\sqrt{7} \Rightarrow a(b+c)+bc=12+7\sqrt{7} \Rightarrow bc=3\sqrt{7} \Rightarrow \begin{cases} b+c=3\sqrt{7} \\ bc=3\sqrt{7} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=3 \Rightarrow c=\sqrt{7}$$

Portanto os lados são 3, 4 e $\sqrt{7}$

Questão – 14.51

Solução:

Pelas relações de Girard temos que: $a + b + c = 8 \Rightarrow p = \frac{a+b+c}{2} = 4$

De acordo com a formula de Heron $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Note que $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ e daí concluímos que

$(p-a)(p-b)(p-c) = P(p) = P(4) = 4^3 - 8 \cdot 4^2 + 4k + m = -64 + 4k + m$

$\Rightarrow S = \sqrt{4 \cdot (4k + m - 64)} = 2 \cdot \sqrt{4k + m - 64}$

Questão – 14.52

Solução:

a) Pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} a+b+c = 8 \\ ab+ac+bc = 24 \\ abc = 16 \end{cases}$$

$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2 \cdot (ab+ac+bc) = 8^2 - 2 \cdot (24) = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2(a^2 + b^2 + c^2) = \log_2 16 = 4$

b) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b} + \frac{\pi}{c}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(ab+ac+bc)}{abc}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{24\pi}{16}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

c) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & c & 0 \\ -3 & 7 & b \end{vmatrix} = abc = 16$

Questão – 14.53

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 14.54

Solução:

a) Pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} a+b+c=-k \\ ab+ac+bc=m \\ abc=-t \end{cases}$$

Como uma raiz é a soma das outras duas temos que $a = b + c$

$$\begin{cases} a+b+c=-k \\ ab+ac+bc=m \\ abc=-t \\ a=b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a=-k \\ a(b+c)+bc=m \\ abc=-t \\ a=b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{k}{2} \\ a^2+bc=m \Rightarrow bc=m-a^2 \Rightarrow \\ abc=-t \\ a=b+c \end{cases}$$

$$\Rightarrow a(m-a^2)=-t \Rightarrow am-a^3=-t \Rightarrow \left(-\frac{k}{2}\right)m-\left(-\frac{k}{2}\right)^3=-t \Rightarrow k^3-4km+8t=0$$

b) Pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} a+b+c=-k \\ ab+ac+bc=m \\ abc=-t \end{cases}$$

Como temos duas raízes simétricas temos que $a + b = 0$

$$\begin{cases} a+b+c=-k \\ ab+ac+bc=m \\ abc=-t \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-k \\ ab+(a+b)c=m \\ abc=-t \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-k \\ ab=m \\ abc=-t \\ a=b+c \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow abc=-km=-t \Rightarrow km-t=0$$

c) Pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ ab+ac+bc=k \\ abc=-m \end{cases}$$

Como temos uma raiz dupla então temos que a = c logo:

$$\begin{cases} 2a+b=0 \\ a^2+2ab=k \\ a^2b=-m \end{cases} \begin{cases} b=-2a \\ a^2+2a(-2a)=k \\ a^2(-2a)=-m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=-\frac{k}{3} \\ a^3=-\frac{m}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^6=-\frac{k^3}{27} \\ a^6=\frac{m^2}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{k^3}{27}=\frac{m^2}{4} \Rightarrow 4k^3+27m^2=0$$

d) Pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} a+b+c=-k \\ ab+ac+bc=m \\ abc=-t \end{cases}$$

Como as raizes estão em progressão harmônica então temos que ab + bc = 2ac

$$\begin{cases} a+b+c=-k \\ ab+ac+bc=m \\ abc=-t \\ ab+bc=2ac \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=-k \\ (ab+bc)+ac=m \\ abc=-t \\ b(a+c)=2ac \end{cases} \Rightarrow 3ac=m \Rightarrow ac=\frac{m}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow abc=\frac{bt}{3} \Rightarrow b=-\frac{3t}{m}$$

$$(a+c)+b=-k \Rightarrow (a+c)b+b^2=-kb \Rightarrow 2ac+\left(-\frac{3t}{m}\right)^2=-k\cdot\left(-\frac{3t}{m}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2m}{3}+\left(-\frac{3t}{m}\right)^2=-k\cdot\left(-\frac{3t}{m}\right) \Rightarrow 2m^3-9ktm+27t^2=0$$

e) Pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} a+b+c+d=-k \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=m \\ abc+abd+acd+bcd=-t \\ abcd=n \end{cases}$$

Como o produto de duas raízes é igual ao produto das outras duas temos que ab = cd

$$\begin{cases} a+b+c+d=-k \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=m \\ abc+abd+acd+bcd=-t \\ abcd=n \\ ab=cd=\sqrt{n} \end{cases} \Rightarrow abc+abd+acd+bcd=-t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ab(c+d)+cd(a+b)=-t \Rightarrow \sqrt{n}.(a+b+c+d)=-t \Rightarrow -k\sqrt{n}=-t \Rightarrow k^2n-t=0$$

f) Pelas relações de Girard e pelo enunciado temos que:

$$\begin{cases} a+b+c+d=-k \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=m \\ abc+abd+acd+bcd=-t \\ a+b=c+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=c+d=-\dfrac{k}{2} \\ ab+cd+(a+b)(c+d)=m \\ ab(c+d)+cd(a+b)=-t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ab+cd=m-\dfrac{k^2}{4} \\ ab(c+d)+cd(c+d)=-t \end{cases} \Rightarrow (ab+cd)(c+d)=-t \Rightarrow \left(m-\frac{k^2}{4}\right)\cdot\left(-\frac{k}{2}\right)=-t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{mk}{2}+\frac{k^3}{8}=-t \Rightarrow k^3-4km+8t=0$$

Questão – 14.55

Solução:

Pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} a+b+c=a \\ ab+ac+bc=b \\ abc=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c=0 \\ a(b+c)+bc=b \\ ab=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c=0 \\ bc=b \Rightarrow c=1 \Rightarrow b=-1 \Rightarrow a=-1 \\ ab=1 \end{cases}$$

Questão – 14.56

Solução:

Seja $P(x)=x^7-1$ então $\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6, \omega^7$ são as raízes de P(x) logo:

$$\omega^7 = \left(\cos\frac{2\pi}{7} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{7}\right)^7 = \cos 2\pi + i\,\text{sen}2\pi = 1$$

$$\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 + \omega^7 = 0 \Rightarrow \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = -1$$

Questão – 14.57

Solução:

Seja $P(x) = x^n - 1$ então $\omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^{n-1}, \omega^n$ são as raízes de $P(x)$ logo:

$$\omega^n = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{n}\right)^n = \cos 2\pi + i\,\text{sen}2\pi = 1$$

$$\omega + \omega^2 + \omega^3 + \ldots + \omega^{n-1} + \omega^n = 0 \Rightarrow \omega + \omega^2 + \omega^3 + \ldots + \omega^{n-1} = -1$$

a) $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \ldots + \omega^{n-1} = -1$

b) $\omega^n = 1$

Questão – 14.58

Solução:

Seja $P(x) = x^6 - 1$ então $\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6$ são as raízes de $P(x)$ logo:

$$\omega^6 = \left(\cos\frac{2\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{6}\right)^6 = \cos 2\pi + i\,\text{sen}2\pi = 1$$

$$\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = 0 \Rightarrow \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 = -1$$

a) $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = -1$

b) $\omega^6 = 1$

Questão – 14.59

Solução:

Seja $P(x) = x^n - 1$ então $\omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^{n-1}, \omega^n$ são as raízes de $P(x)$ logo:

$$\omega^n = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{n}\right)^n = \cos 2\pi + i\,\text{sen}2\pi = 1$$

$$\omega + \omega^2 + \omega^3 + \ldots + \omega^{n-1} + \omega^n = 0$$

$S = 1 + 2\omega + 3\omega^2 + 4\omega^3 + \ldots + n\omega^{n-1}$

$\omega S = \omega + 2\omega^2 + 3\omega^3 + \ldots + (n-1)\omega^{n-1} + n\omega^n$

$S - \omega S = 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \ldots + \omega^{n-1} + \omega^n - (n+1)\omega^n \Rightarrow S(1-\omega) = 1 - (n+1) \Rightarrow S = \frac{n}{1-\omega}$

Capítulo 15
Raízes Racionais

Capítulo 15

Questão – 15.8

Solução:

a) As possíveis raízes inteiras dessa equação são os divisores do termo independente. Portanto os divisores de 4. Logo as possíveis raízes inteiras são ± 1, ± 2 e ± 4.

b) As possíveis raízes racionais dessa equação são os números da forma $\frac{p}{q}$ onde p é um divisor de do termo independente e q um divisor do termo de maior grau. Logo as possíveis raízes racionais são $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}$.

Questão – 15.9

Solução:

Não, pois 3 não é um divisor de 7

Questão – 15.10

Solução:

Não, pois se k fosse inteiro as possíveis raízes racionais seriam $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{7}{2}, \pm\frac{7}{4}, \pm 1, \pm 7$

Questão – 15.11

Solução:

a) Seja $P(x) = x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 17x - 12$
Note que $P(3) = P(4) = 0$

Portanto $P(x)$ é divisível por $x^2 - 7x + 12$

$$\frac{x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 17x - 12}{x^2 - 7x + 12} = x^2 - 2x - 1 = (x - (1+\sqrt{2}))\cdot(x - (1-\sqrt{2}))$$

Portanto as raízes são $\{3, 4, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\}$

b) Seja $P(x) = 4x^4 - 24x^3 + 55x^2 - 52x + 15$

Note que $P\left(\frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

Portanto P(x) é divisível por $x^2 - 2x + \frac{9}{4}$

$$\frac{4x^4 - 24x^3 + 55x^2 - 52x + 15}{x^2 - 2x + \frac{9}{4}} = 4(x^2 - 4x + 5) = 4 \cdot (x - (2 - i))(x - (2 + i))$$

Portanto as raízes são $\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2 - i, 2 + i\}$

c) Seja $P(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 8x$
Note que $P(0) = P(1) = 0$

Portanto P(x) é divisível por $x^2 - x$

$$\frac{x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 8x}{x^2 - x} = x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$$

Portanto as raízes são $\{0, 1, -2, 4\}$

d) Seja $P(x) = x^3 - \frac{7}{3}x^2 - \frac{14}{3}x + 8$

Note que $P(-2)$

Portanto P(x) é divisível por $x + 2$

$$\frac{x^3 - \frac{7}{3}x^2 - \frac{14}{3}x + 8}{x + 2} = x^2 - \frac{13}{3}x + 4 = (x - 3)\left(x - \frac{4}{3}\right)$$

Portanto as raízes são $\{3, -2, \frac{4}{3}\}$

Questão – 15.12

Solução:

Seja $P(x) = x^4 - 8x^3 + 13x^2 + 12x - 10$
Note que $P(-1) = 1 + 8 + 13 - 12 - 10 = 0$
Note que $P(5) = 625 - 1000 + 325 + 60 - 10 = 0$

Daí temos que

$$\frac{x^4 - 8x^3 + 13x^2 + 12x - 10}{(x-5)(x+1)} = x^2 - 4x + 2 = (x - (2+\sqrt{2}))\cdot(x-(2-\sqrt{2}))$$

$$\Rightarrow x^4 - 8x^3 + 13x^2 + 12x - 10 = (x - (2+\sqrt{2}))\cdot(x-(2-\sqrt{2}))\cdot(x-5)\cdot(x+1)$$

Questão – 15.13

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 15.14

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 15.15

RESOLVIDA NO FINAL DO LIVRO NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7

Questão – 15.16

Solução:

Seja $P(x) = x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 14x^2 + 6x - 20$. Como 2 + i é raiz então 2 – i também é raiz.
Note que $P(-2) = -32 - 32 + 40 + 56 - 12 - 20 = 0$

Daí temos que:

$$\frac{x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 14x^2 + 6x - 20}{(x^2 - 4x + 5)(x-2)} = x^2 - 2 = (x - \sqrt{2}))\cdot(x+\sqrt{2})$$

Portanto as raízes são $\{2 + i, 2 - i, -2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

Questão – 15.17

Solução:

Seja $P(x) = x^4 + 4x^3 + 13x^2 + 36x + 36$. Como 2 + i é raiz então 2 – i também é raiz.
Note que $P(-2) = 16 - 32 + 52 - 72 + 36 = 0$

Daí temos que:

$$\frac{x^4+4x^3+13x^2+36x+36}{(x+2)} = x^3+2x^2+9x+18$$

Seja $M(x) = x^3+2x^2+9x+18$

Note que $M(-2) = -8+8-18+18$

Daí temos que:

$$\frac{x^3+2x^2+9x+18}{(x+2)} = x^2+9 = (x-3i)\cdot(x+3i)$$

Portanto as raízes são {–2, 3i, –3i}

Questão – 15.18

Solução:

Seja $P(x) = 2x^5-9x^4+14x^3-13x^2+12x-4$.

Note que $P(2) = 64-144+112-52+24-4 = 0$

Daí temos que:

$$\frac{2x^5-9x^4+14x^3-13x^2+12x-4}{(x-2)} = 2x^4-5x^3+4x^2-5x+2$$

Seja $M(x) = 2x^4-5x^3+4x^2-5x+2$

Note que $M(2) = 32-40+16-10+2 = 0$

Daí temos que:

$$\frac{2x^4-5x^3+4x^2-5x+2}{(x-2)} = 2x^3-x^2+2x-1$$

Seja $N(x) = 2x^3-x^2+2x-1$

Note que $N(2) = \frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1-1 = 0$

Daí temos que:

$$\frac{2x^3-x^2+2x-1}{(2x-1)} = x^2+1 = (x-i)(x+i)$$

Portanto as raízes são $\{2, \frac{1}{2}, i, -i\}$

Questão – 15.19

Solução:

Faça $x^2 = y$
Daí temos que:
$P(y) = y^3 - 7y^2 + 12y - 12 = 0$

Note que $P(2) = 0$
Daí temos que:

$$\frac{y^3 - 7y^2 + 12y - 12}{y - 2} = y^2 - 5y + 6 = (y-2)\cdot(y-3) \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Questão – 15.20

Solução:

Seja $P(x) = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.
Note que $P(-1) = 1 - 2 + 2 - 2 + 2 - 2 + 1 = 0$
Daí temos que:

$$\frac{x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{(x+1)} = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^4 + x^2 + 1)$$

Faça $x^2 = y$ então

$$x^4 + x^2 + 1 = 0 \Rightarrow y^2 + y + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4\cdot 1\cdot 1 = -3 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{3}i \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \\ y = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \\ x^2 = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}} \\ x^2 = \pm\sqrt{\dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}} \end{cases}$$

$$(a+bi)^2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow a^2 - b^2 + 2ab = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -\frac{1}{2} \\ 2ab = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$(a+bi)^2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow a^2 - b^2 + 2ab = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -\frac{1}{2} \\ 2ab = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Portanto as raizes são $\{-1, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\}$

Questão – 15.21

Solução:

Se a equação tivesse raiz racional seria ± 1 ou ± 2

Note que se $x = 1$ então $x^n + 2kx - 2 = 1 - 2k - 2 = -2k - 1 \neq 0$,pois $k \in \mathbb{Z}$

Note que se $x = -1$ então $x^n + 2kx - 2 = (-1)^n - 2k - 2 = \begin{cases} -2k - 3 \neq 0 \\ -2k - 1 \neq 0 \end{cases}$, pois $k \in \mathbb{Z}$

Note que se $x = 2$ então $x^n + 2kx - 2 = 2^n - 4k - 2 = -4k + 2^n - 2 \neq 0$, pois $4k$ e 2^n são múltiplos de 4 e 2 não é múltiplo de 4

Note que se $x = -2$ então $x^n + 2kx - 2 = (-2)^n - 4k - 2 = -4k + (-2)^n - 2 \neq 0$, pois $4k$ e $(-2)^n$ são múltiplos de 4 e 2 não é múltiplo de 4.

Questão – 15.24

Solução:

Seja $P(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1$

Como os coeficientes são todos racionais e $2+\sqrt{3}$ é raiz de $P(x)$ então $2-\sqrt{3}$ também é raiz de $P(x)$ logo $P(x)$ é divisível por $x^2 - 4x + 1$

$$\frac{x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1}{x^2 - 4x + 1} = x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$$

Questão – 15.25

Solução:

Seja $P(x) = x^5 + x^4 - 14x^3 - 14x^2 + 9x + 9$

Como os coeficientes são todos racionais e $\sqrt{2} - \sqrt{5}$ é raiz então $\sqrt{2} + \sqrt{5}$, $-\sqrt{2} - \sqrt{5}$ e $-\sqrt{2} + \sqrt{5}$ também são raízes e portanto P(x) é divisível por: $(x^2 - 2\sqrt{5}x + 3) \cdot (x^2 + 2\sqrt{5}x + 3) = (x^4 - 14x^2 + 9)$

$$\frac{x^5 + x^4 - 14x^3 - 14x^2 + 9x + 9}{x^4 - 14x^2 + 9} = x + 1$$

Portanto as raízes são $\{-1, \sqrt{2} + \sqrt{5}, -\sqrt{2} - \sqrt{5}, \sqrt{2} - \sqrt{5}, -\sqrt{2} + \sqrt{5}\}$

Questão – 15.26

Solução:

Como os coeficientes são todos racionais e $\sqrt{2}$ é raiz então $-\sqrt{2}$ também é raiz
Logo o polinômio é divisível por $x^2 - 2$

$$\frac{x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 10x - 12}{x^2 - 2} = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Portanto as raízes são $\{2, 3, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

Questão – 15.27

Solução:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{9 + \sqrt{80}} = \sqrt{9 + 2\sqrt{20}} \Rightarrow a + b + 2\sqrt{ab} = 9 + 2\sqrt{20} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 9 \\ ab = 20 \end{cases} \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = 5$$

Portanto $2 + \sqrt{5}$ é raiz logo $2 - \sqrt{5}$ também é raiz
Assim temos que o polinômio é divisível por $x^2 - 4x - 1$

$$\frac{x^4 - 4x^3 - 4x - 1}{x^2 - 4x - 1} = x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$$

Portanto as raízes são $\{i, -i, 2 + \sqrt{5}, 2 - \sqrt{5}\}$

Capítulo 16
Equações Recíprocas

Capítulo 16

Questão – 16.5

Solução:

Os termos equidistantes são simétricos logo

$$\begin{cases} a - b = -1 \\ 3a - 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 3$$

Questão – 16.6

Solução:

Os termos equidistantes podem ser simétricos logo $a = -7$ e $b = -4$
Os termos equidistantes podem ser iguais logo $a = 7$ e $b = 4$

Questão – 16.7

Solução:

a) Note que $3x^4 - 10x^3 + 6x^2 - 10x + 3$ é uma equação reciproca. Daí devemos fazer dividir tudo por x^2 e fazer $y = x + \frac{1}{x}$. Assim temos que:

$$3\cdot\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0 \Rightarrow 3\cdot(y^2 - 2) - 10y + 6 = 0 \Rightarrow 3y^2 - 10y = 0$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} y = \frac{10}{3} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{3} \\ x = \pm i \end{cases}$$

b) Seja $P(x) = 2x^8 - 6x^7 + 5x^6 + 6x^5 - 14x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 6x + 2$
Note que $P(1) = P(-1) = 0$ logo $P(x)$ é divisível por $x^2 - 1$ daí temos que:

$$\frac{2x^8 - 6x^7 + 5x^6 + 6x^5 - 14x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 6x + 2}{x^2 - 1} = 2x^6 - 6x^5 + 7x^4 - 7x^2 + 6x - 2$$

Seja $M(x) = 2x^6 - 6x^5 + 7x^4 - 7x^2 + 6x - 2$

Note que M(1) = M(–1) = 0 logo M(x) é divisível por $x^2 - 1$ daí temos que:

$$\frac{2x^6 - 6x^5 + 7x^4 - 7x^2 + 6x - 2}{x^2 - 1} = 2x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 6x + 2$$

Note que $2x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 6x + 2$ é uma equação reciproca. Daí devemos fazer dividir tudo por x^2 e fazer $y = x + \frac{1}{x}$. Assim temos que:

$$2\cdot\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0 \Rightarrow 2\cdot(y^2 - 2) - 6y + 9 = 0 \Rightarrow 2y^2 - 6y + 5 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{3 \pm i}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1 \pm i}{2} \\ x = 1 \pm i \end{cases}$$

c) Seja $P(x) = 12x^6 - 4x^5 - 53x^4 + 53x^2 + 4x - 12$

Note que P(1) = P(–1) = 0 logo P(x) é divisível por $x^2 - 1$ daí temos que:

$$\frac{12x^6 - 4x^5 - 53x^4 + 53x^2 + 4x - 12}{x^2 - 1} = 12x^4 - 4x^3 - 41x^2 - 4x + 12$$

Faça $y = x + \frac{1}{x}$. Assim temos que:

$$12x^4 - 4x^3 - 41x^2 - 4x + 12 = 0 \Rightarrow 12\cdot\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\cdot\left(x + \frac{1}{x}\right) - 41 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12\cdot(y^2 - 2) - 4y - 41 = 0$$

$$\Rightarrow 12y^2 - 4y - 65 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{13}{6} \\ y = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{2}{3} \\ x = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

d) $\frac{5x^3 + 5x}{2} = \frac{3x^4 + 31x^2 + 3}{7} \Rightarrow 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$

Daí devemos fazer dividir tudo por x^2 e fazer $y = x + \frac{1}{x}$. Assim temos que:

$$6\cdot\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0\Rightarrow 6\cdot(y^2-2)-35y+62=0$$

$$\Rightarrow 6y^2-35y+50=0\Rightarrow\begin{cases}y=\dfrac{10}{3}\\ y=\dfrac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\ x=\dfrac{1}{3}\\ x=2\\ x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Questão – 16.8

Solução:

$$a\alpha^4+7\alpha^3+5\alpha^2+b\alpha+9=a\cdot\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^4+7\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^3+5\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^2+b\left(-\frac{1}{\alpha}\right)+9$$

$$\Rightarrow a\alpha^4+7\alpha^3+5\alpha^2+b\alpha+9=9\alpha^4-b\alpha^3+5\alpha^2-7\alpha+a\Rightarrow\begin{cases}b=-7\\ a=9\end{cases}$$

Capítulo 17
Raízes Comuns

Capítulo 17

Questão – 17.4

Solução:

Note que B(– 1) = 0 logo B(x) é divisível por x + 1 e daí temos que

$$\frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x + 1} = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Observe que A(– 1) = 12, A(2) = 0 e A(3) = 60

Portanto a única raiz comum é 2.

Questão – 17.5

Solução:

Note que B(1) = B(2) = 0 logo B(x) é divisível por $x^2 - 3x + 2$ e daí temos que

$$\frac{x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 9x + 6}{x^2 - 3x + 2} = x^2 + 3 = (x - \sqrt{3}i)\cdot(x + \sqrt{3}i)$$

Observe que A(1) = A(2) = 0

$$\frac{x^6 - 3x^5 + 2x^4 - 4x^2 + 12x - 8}{x^2 - 3x + 2} = x^4 - 4 = (x^2 - 2)(x^2 + 2) =$$

$$= (x - \sqrt{2}i)\cdot(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2})\cdot(x + \sqrt{2})$$

Portanto as única raízes comuns é 1 e 2.

Questão – 17.6

Solução:

$$x^2 - 4 = (x - 2)\cdot(x + 2)$$

$$2^3 - 2^2 + 2k - 1 = 0 \Rightarrow k = -\frac{3}{2}$$

$$(-2)^3 - (-2)^2 + (-2)k - 1 = 0 \Rightarrow k = -\frac{13}{2}$$

Questão – 17.7

Solução:

$x^2 - 4 = (x-2)\cdot(x+2)$

$$\begin{cases} 2^3 + 2^2 + 2k + m = 0 \\ (-2)^3 + (-2)^2 + (-2)k + m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2k + m = -12 \\ -2k + m = 4 \end{cases} \Rightarrow m = -4 \Rightarrow k = -4$$

Questão – 17.8

Solução:

Dividindo A(x) por B(x) obtemos quociente x e resto kx + (k + 2)
Dividindo B(x) por kx + (k + 2) obtemos quociente x – 2 e resto zero
Daí concluímos que mdc(A(x), B(x)) = kx+ (k + 2)
Para termos uma raiz comum é necessário que:

$$kx + k + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-k-2}{k}$$

Questão – 17.11

Solução:

Seja $B(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$
Note que B(– 1) = 0 logo B(x) é divisível por x + 1 e daí temos que:

$$\frac{x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2}{x+1} = x^3 - 3x - 2$$

Seja $C(x) = x^3 - 3x - 2$

Note que C(– 1) = 0 logo C(x) é divisível por x + 1 e daí temos que:

$$\frac{x^3 - 3x - 2}{x+1} = x^2 - x - 2 = (x-2)\cdot(x+1)$$

Portanto –1 é raiz tripla e a outra raiz é 2.

Questão – 17.12

Solução:

Seja $B(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 - 4x - 8$

Note que B(2) = 0 logo B(x) é divisível por x – 2 e daí temos que:

$$\frac{x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 - 4x - 8}{x - 2} = x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$$

Seja $C(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$

Note que C(2) = 0 logo C(x) é divisível por x – 2 e daí temos que:

$$\frac{x^4 - 3x^3 + x^2 + 4}{x - 2} = x^3 - x^2 - x - 2 = (x - 2)(x^2 + x + 1)$$

Portanto 2 é raiz tripla e as outras raízes são $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ e $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

Capítulo 18
Raízes Reais

Capítulo 18

Questão – 18.7

Solução:

$P'(x) = 15x^2 - 8x + 2 \Rightarrow \Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 15 \cdot 2 = -56 < 0$

Portanto P'(x) é sempre positivo logo o polinômio P(x) é sempre crescente

Questão – 18.8

Solução:

Esta afirmativa é falsa

Note que P(0) = 4 e P(1) = 7

Acredito que o enunciado correto seria $P(x) = -x^3 + x^2 - 3x + 4$

$P'(x) = -3x^2 + 2x - 2 \Rightarrow \Delta = (2)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-2) = -20 < 0$

Portanto P'(x) é sempre negativo logo o polinômio P(x) é sempre decrescente

Questão – 18.9

Solução:

Para mostramos que o polinômio tem somente uma raiz real vamos usar o mesmo raciocínio do exercício 18.6 letra "a".

Como P(x) tem grau ímpar então ele tem pelo menos uma raiz real.

Derivando P(x) temos que $P'(x) = -3x^2 + 2x - 3 \Rightarrow \Delta = (2)^2 - 4 \cdot (-3)(-2) = -20$

Portanto P'(x) é sempre negativo logo o polinômio P(x) é sempre decrescente

Logo P(x) tem somente uma raiz real.

Como P(1) = 1 e P(3) = – 23 então o polinômio tem uma raiz no intervalo (1, 3) logo ele tem uma raiz positiva

Falta-nos só provar que esta raiz é irracional

Pelo teste da raiz racional esta raiz seria 1, –1, 2, –2, 4, –4

No intervalo (1, 3) só temos 2. Note que P(2) = – 6.

Portanto esta raiz tem que ser irracional.

Questão – 18.10

Solução:

a) Falsa. Pelo exercício resolvido 18.2 o correto seria A(x) possui uma raiz real negativa.

b) Verdadeira pelo exercício resolvido 18.2

c) Verdadeira pelo exercício resolvido 18.2
d) Falsa. Pelo exercício resolvido 18.2 o correto seria B(x) possui uma raiz real positiva.
e) Verdadeira. Note que – C(x) atende as condições do exercício resolvido 18.2 logo – C(x) tem uma raiz real positiva. Como as raízes de –C(x) e C(x) são as mesmas então C(x) também tem uma raiz real positiva
f) Falsa. Pela letra "e" o correto seria C(x) possui uma raiz real positiva.
g) Falsa. Pela letra "h" o correto seria D(x) possui uma raiz real positiva.
h) Verdadeira. Note que – D(x) atende as condições do exercício resolvido 18.2 logo – D(x) tem uma raiz real positiva. Como as raízes de –D(x) e D(x) são as mesmas então D(x) também tem uma raiz real positiva
i) Falsa, pois pode ocorrer de todas as raízes serem complexas como é no caso do polinômio $8x^{42} + 7$.
j) Verdadeira pelo exercício resolvido 18.3
k) Verdadeira. Note que – G(x) atende as condições do exercício resolvido 18.3 logo – G(x) tem pelo menos duas raízes reais sendo uma positiva e outra negativa. Como as raízes de –G(x) e G(x) são as mesmas então G(x) tem pelo menos duas raízes reais sendo uma positiva e outra negativa.
l) Falsa. Para que esta equação tivesse pelo menos duas raízes reais sendo uma positiva e outra negativa seria preciso que os termos de maior grau e menor grau tivessem sinais contrários.

Questão – 18.11

Solução:

a) Pelo que foi dito na pagina 268 do **LIVRO NOÇOES DE MATEMATICA VOLUME 7**
Temos que –1 é raiz de multiplicidade par e 2 é raiz simples
Como P(x) tem grau 3 então $P(x) = a(x + 1)^2.(x – 2) = a(x^2 + 2x + 1)(x – 2) = a.(x^3 + 2x^2 + x – 2x^2 – 4x – 2) = a(x^3 – 3x – 2)$
Pelo gráfico vemos que P(0) = – 6 logo a = 3 portanto $P(x) = 3x^3 – 9x – 6$

b) Pelo que foi dito na pagina 268 do **LIVRO NOÇOES DE MATEMATICA VOLUME 7**
Temos que –1 é raiz de multiplicidade par e 2 é raiz simples
Como P(x) tem grau 5 então $P(x) = a(x + 1)^4.(x – 2) = a(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1)(x – 2) = a(x^5 + 2x^4 – 2x^3 – 8x^2 – 7x – 2)$
Pelo gráfico vemos que P(0) = – 6 logo a = 3 portanto $P(x) = 3x^5 + 6x^4 – 6x^3 – 24x^2 – 21x – 6$

Questão – 18.12

Solução:

Pelo que foi dito na pagina 268 do **LIVRO NOÇOES DE MATEMATICA VOLUME 7**

Temos que 1 é raiz de multiplicidade impar maior do que 1 e – 2 é raiz simples

Como P(x) tem grau 4 então $P(x) = a(x-1)^3.(x+2) = a(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)(x+2) = a(x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2)$

Pelo gráfico vemos que P(0) = – 10 logo a = 5 portanto $P(x) = 5x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 25x - 10$

Questão – 18.13

Solução:

Para um polinômio de grau 3 cm coeficientes reais temos 4 possibilidades de raizes.

Possibilidade 1: o polinômio tem uma raiz real tripla

Possibilidade 2: o polinômio tem uma raiz real dupla e uma raiz real simples

Possibilidade 3: o polinômio possui 3 raizes reais e distintas

Possibilidade 4: o polinômio tem uma raiz real e duas raízes complexas

Vou mostra que a possibilidade 1 é impossível para o polinômio $P(x) = 2x^2 + 3x^2 - 12x + k$

Para termos uma raiz real tripla é preciso que $P(x) = 2.(x-a)^3 = 2x^3 - 6ax^2 + 6a^2x - 2a^3$ dai temos que:

$$\begin{cases} -6a = 3 \\ 6a^2 = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ a^2 = -2 \end{cases}$$

Logo este caso é impossível

Resta – nos analisar os outros 3 casos

a) Seja m a raiz dupla e n a raiz simples

Pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} 2m + n = -\dfrac{3}{2} \\ m^2 + 2mn = -6 \Rightarrow n = -\dfrac{3}{2} - 2m \Rightarrow m^2 + 2m\left(-\dfrac{3}{2} - 2m\right) = -6 \Rightarrow m^2 + m - 2 = 0 \\ m^2 n = -\dfrac{k}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 1 \Rightarrow n = \dfrac{7}{2} \Rightarrow k = 7 \\ m = -2 \Rightarrow n = \dfrac{5}{2} \Rightarrow k = -20 \end{cases}$$

b) Seja a uma raiz es de P(x) é então P(x) é divisível por x – a

$$\begin{array}{l|l} 2x^3+3x^2-12x+k & x-a \\ \hline -2x^3+2ax^2 & 2x^2+(2a+3)x+(2a^2+3a-12) \\ \hline (2a+3)x^2-12x+k & \\ -(2a+3)x^2-(2a^2+3a)x & \\ \hline (2a^2+3a-12)x+k & \\ (2a^2+3a-12)x+(2a^3+3a^2-12a) & \\ \hline \left(2a^3+3a^2-12a+k\right) & \end{array}$$

Para que tenhamos 3 raízes reais e distintas é preciso que a equação $2x^2+(2a+3)x+(2a^2+3a-12)$

Tenha duas raízes reais e distintas logo

$\Delta > 0 \Rightarrow (2a+3)^2 - 4\cdot 2\cdot(2a^2+3a-12) > 0 \Rightarrow -12a^2-12a+105 > 0$

$$\Rightarrow -4a^2-4a+35>0 \Rightarrow \left\{-\frac{7}{2} < a < \frac{5}{2}\right.$$

$$k = 12a-3a^2-2a^3 \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{7}{2} \Rightarrow k=-20 \\ a=\frac{5}{2} \Rightarrow k=7 \end{cases} \Rightarrow -20 < k < 7$$

c) Para que tenhamos uma raiz real e duas complexas é preciso que a equação $2x^2+(2a+3)x+(2a^2+3a-12)$

Não tenha raiz real logo

$\Delta < 0 \Rightarrow (2a+3)^2 - 4\cdot 2\cdot(2a^2+3a-12) < 0 \Rightarrow -12a^2-12a+105 < 0$

$$\Rightarrow -4a^2-4a+35<0 \Rightarrow \begin{cases} a<-\frac{7}{2} \\ a>\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$k = 12a-3a^2-2a^3 \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{7}{2} \Rightarrow k=-20 \\ a=\frac{5}{2} \Rightarrow k=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k<-20 \\ k>7 \end{cases}$$

Questão – 18.18

Solução:

Note que P(1) = 1 – 3 + 5 – 1 = 2 > 0 e P(4) = 64 – 48 + 20 – 1 = 35 > 0
Portanto há um numero para de raizes no intervalo
Logo o numero de raízes no intervalo é zero ou 2.

Questão – 18.19

Solução:

Note que P(1) = 1 + 2 – 7 + 3 = – 1 < 0 e P(3) = 27 + 18 – 21 + 3 = 27 > 0
Portanto há uma raiz [no intervalo]1, 3[
Pelo teste da raiz racional esta raiz seria 1, –1, 3, –3
Destas possíveis raízes nenhuma está no intervalo]1, 3[
Portanto a raiz é irracional.

Questão – 18.20

Solução:

Note que P(1) = 1 + 1 – 8 + k = – 6 + k e P(3) = 27 + 9 – 24 + k = 12 + k
Para que tenhamos um numero impar de raízes é preciso que P(1).P(3) < 0
Logo $(k - 6).(k + 12) < 0 \Rightarrow -12 < k < 6$

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

Questão – III.1

Solução:

Como – 2 e $-\frac{1}{2}$ são raízes então o polinômio é divisível por $(x + 2)(2x + 1) = 2x^2 + 5x + 2$

$$\frac{2x^4 + x^3 - 4x^2 + 6x + 4}{2x^2 + 5x + 2} = x^2 - 2x + 2 = (x - (1 + i))(x - (1 - i))$$

Portanto as raízes são -2, $-\frac{1}{2}$, $1 - i$ e $1 + i$

Questão – III.2

Solução:

Como 2i é raiz dupla então – 2i também é raiz dupla então o polinômio é divisível por

$(x + 2i)^2 . (x - 2i)^2 = (x^2 + 4)^2 = x^4 + 8x^2 + 16$

$$\frac{2x^6 + x^5 + 13x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 16x - 48}{x^4 + 8x^2 + 16} = 2x^2 + x - 3 = (x - 1))(2x + 3)$$

Portanto as raizes são 2i, – 2i, $-\frac{3}{2}$ e 1

Questão – III.3

Solução:

Seja a – r, a, a + r as raízes. Usando as relações de Girard temos que:

$3a = -3 \Rightarrow a = -1$

$(-1 - r).(-1)(-1 + r) = -8 \Rightarrow 1 - r^2 = -8 \Rightarrow r = \pm 3$

Logo as raízes são –4, –1 e 2

Questão – III.4

Solução:

a) Correção no ENUNCIADO: $P(x) = x^3 + 7x^2 + 17x + 15$

Note que $P(-3) = -27 + 63 - 51 + 15 = 0$

Logo o polinômio é divisível por x + 3

$$\frac{x^3 + 7x^2 + 17x + 15}{x + 3} = x^2 + 4x + 5 = (x - (-2 + i))(x - (-2 - i))$$

Portanto as raízes são – 3, –2 – i e – 2 + i

b) Note que $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{17}{4} + 24 - 20 = 0$

Logo o polinômio é divisível por 2x – 1

$$\frac{2x^3 - 17x^2 + 48x - 20}{2x - 1} = x^2 - 8x + 20 = (x - (4 + 2i))(x - (4 - 2i))$$

Portanto as raízes são $\frac{1}{2}$, 4 – 2i e 4 + 2i

Questão – III.5

Solução:

Seja m a raiz dupla e n a raiz simples. Usando as relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} 2m+n=-8 \\ m^2+2mn=5 \Rightarrow n=-8-2m \Rightarrow m^2+2m(-8-2m)=5 \Rightarrow 3m^2+16m+5=0 \\ m^2n=-50 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=-5 \Rightarrow n=2 \\ m=-\dfrac{1}{3} \Rightarrow n=-450 \Rightarrow 2m+n=-\dfrac{1352}{3} \end{cases}$$

Portanto as raízes são 2 e – 5

Questão – III.6

Solução:

Lembre que $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)((a+b)^2-3ab)$

Faça $a=\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$ e $b=\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}$

Assim temos que

$$ab=\left(\sqrt[3]{(45-29\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{(45+29\sqrt{2}}\right)=\sqrt[3]{(2025-1682}=\sqrt[3]{343}=7$$

Logo

$a^3+b^3=(a+b)((a+b)^2-3ab) \Rightarrow 90=x\cdot(x^2-21) \Rightarrow x^3-21x-90=0$

$\Rightarrow (x-6)(x^2+6x+15)$

A equação $x^2+6x+15$ só tem raízes complexas e $\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}$ é real logo

$$\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}=6$$

Questão – III.7

Solução:

Lembre que $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)((a+b)^2-3ab)$

Faça $a=\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}$ e $b=\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}$

Assim temos que $ab = \left(\sqrt[3]{(3-\sqrt{8})}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{-3+\sqrt{8}}\right) = \sqrt[3]{(9-8)} = \sqrt[3]{1} = 1$

Logo

$a^3 + b^3 = (a+b)((a+b)^2 - 3ab) \Rightarrow 6 = x\cdot(x^2 - 3) \Rightarrow x^3 - 3x - 6 = 0$

Pelo teste da raiz racional os candidatos a raiz são $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ e ± 6

$P(1) = 1 - 3 - 6 = -8$
$P(-1) = -1 + 3 - 6 = -4$
$P(2) = 8 - 6 - 6 = -4$
$P(-2) = -8 + 6 - 6 = -8$
$P(3) = 27 - 9 - 6 = 12$
$P(-3) = -27 + 9 - 6 = -24$
$P(6) = 216 - 18 - 6 = 192$
$P(-6) = -216 + 18 - 6 = -204$

Portanto as raízes desta equação são todas irracionais

Logo $\sqrt[3]{3-\sqrt{8}} + \sqrt[3]{3+\sqrt{8}}$ é irracional

Questão – III.8

Solução:

As raízes n – ésimas do numero k são as raízes da equação $x^n - k = 0$

a) Verdadeiro. Como n é impar então o polinômio tem pelo menos uma raiz real.
b) Verdadeiro. Se existisse uma raiz real então como n é par então x^n seria positivo, absurdo, pois $x^n = k < 0$. Portanto as raízes do polinômio $x^n - k$ são todas complexas.
c) Verdadeiro pelo exercício resolvido 18.3.
d) Verdadeiro. Pelo teorema 13.1 pagina 203 do livro **NOÇÕES DE MATEMATICA VOLUME 7** temos que se a + bi é raiz então a – bi também é raiz. Portanto as raízes imaginarias formam pares de números conjugados.

A Editora Vestseller tem a honra de apresentar: Solucionário - Noções de Matemática, que visa consolidar o máximo de aproveitamento da lendária obra de Aref Antar Neto, Nilton Lapa, José Luiz Pereira Sampaio e Sidney Luiz Cavallantte, a Coleção Noções de Matemática, uma obra prima em 8 volumes, que trata de todo o conteúdo da Matemática do Ensino Médio de forma primorosa, com volumes que contém teoria completa e detalhada, incluindo demonstrações de propriedades e de teoremas.

Este solucionário é composto por questões resolvidas pelo professor Marcílio Miranda autor de Problemas Selecionados de Matemática volume 1, que nos honrou em colaborar com suas horas de estudo e trabalho para garantir um livro de qualidade e indispensável para alunos e professores.

ISBN 978-85-60653-43-0

9 788560 653430

EDITORA VestSeller

www.vestseller.com.br